NOUVEAUX PROGRAMMES

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Eléments de Géométrie Plane

(Cl. de 4e et 3e)

PAR F. BRACHET ET J. DUMARQUÉ

Librairie Delagrave

NOUVEAUX PROGRAMMES

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Eléments de Géométrie Plane

(Cl. de 4e et 3e)

PAR F. BRACHET ET J. DUMARQUÉ

Librairie Delagrave

LIBRAIRIE DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, Paris (Ve)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

F. BRACHET et J. DUMARQUÉ

Arithmétique. *Calcul mental, Système métrique* (Cl. de 6e et 5e). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Arithmétique. Algèbre (Cl. de 4e et 3e). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Éléments de Géométrie Plane (Cl. de 4e et 3e). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Algèbre (Cl. de 2e et 1re). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Précis de Géométrie.

I. Géométrie Plane (Cl. de 2e). Un vol. in-8o, br. ou cart.

II. Géométrie dans l'espace (Cl. de 1re). Un vol. in-8o, br. ou cart.

III. Compléments, Transformations, Coniques (Cl. de Math.). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Algèbre et Cosmographie (Cl. de Philo.). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Arithmétique (Cl. de Math.). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Précis d'Algèbre (Cl. de Math.). Un vol. in-8o, br. ou cart

Trigonométrie Cl. de Math.). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Géométrie Descriptive (Cl. de Math.). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Mécanique (Cl. de Math.). Un vol in-8o, br. ou cart.

Précis de Cosmographie (Cl. de Math.). Un vol. in-8o, br. ou cart.

Tables de Logarithmes. Un vol. grand in-12.

NOUVEAUX PROGRAMMES

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE PLANE

A L'USAGE

DES CLASSES DE QUATRIÈME ET DE TROISIÈME
DES ÉLÈVES DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE
(GARÇONS ET JEUNES FILLES)

PAR

F. BRACHET
Ancien élève de l'École Normale supérieure
Inspecteur en chef de l'Instruction publique
de l'Indochine.

et

J. DUMARQUÉ
Ancien élève de l'École Normale supérieure.
Agrégé de l'Université.
Professeur au Lycée Condorcet.

350 EXERCICES ET PROBLÈMES

SOIXANTE-SEIZIÈME MILLE



PARIS
LIBRAIRIE DELAGRAVE
15, RUE SOUFFLOT, 15
1935

Tous droits de reproduction, de traduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Copyright by Librairie Delagrave, 1924.

GÉOMÉTRIE

PREMIÈRE PARTIE

LA DROITE ET LE CERCLE

CHAPITRE I

SEGMENTS, ARCS, ANGLES, ET LEUR MESURE

§ 1. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES

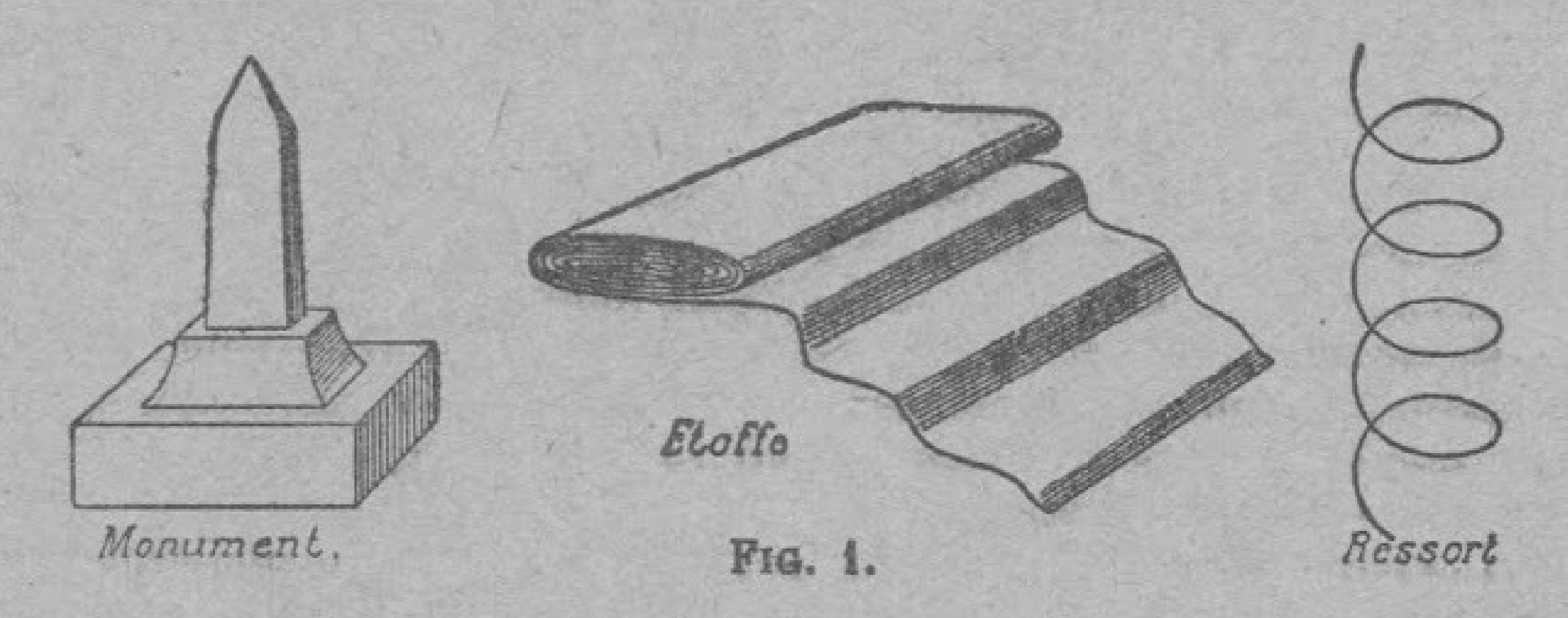


FIG. 1.

1. Solides. Figures invariables. — Un presse-papier nous paraît conserver la même forme et les mêmes dimensions, que nous le regardions à un moment ou à un autre, que nous le tenions à la main ou qu'il soit placé sur la table; il ne paraît pas changer non plus pendant que nous le transportons d'un endroit à un autre. De tels corps (brique, table, pièce de monnaie, etc.) s'appellent **solides** ou **figures invariables.** Les corps que l'on étudie en géométrie sont des figures invariables.

2. Point. — L'idée de point est donnée par des corps extrêmement petits : grains de poussière, marque laissée sur le papier par la pointe d'un crayon. Une étoile apparaît comme un point lumineux.

3. Ligne. — L'idée de ligne est donnée par des corps très déliés : fil de forme quelconque (fil de toile d'araignée, fil de métal), trace laissée par un crayon promené sur le papier.

4. Surface. — L'idée de surface est donnée par des corps de très faible épaisseur : enveloppe d'un ballon de caoutchouc, récipient de fer-blanc, feuille de papier, étoffe très mince.

5. Limites des corps, des surfaces, des lignes. — Étant donné un solide, on imagine qu'il est séparé de ce qui l'entoure par ce qu'on appelle sa surface. On peut imaginer la surface d'une règle de bois, par exemple, comme une couche de vernis extrêmement mince qui serait passée sur toute la règle et qui séparerait le bois de l'air environnant. On dit que : *ce qui limite un corps est une surface.*

On peut séparer une feuille de papier en deux parties par un trait (ligne) et, si on veut, couper la feuille en suivant cette ligne; on dit que : *ce qui limite une portion de surface est une ligne.*

On peut faire une petite marque (point) sur un fil de fer et, si on veut, couper le fil en cet endroit; on dit que : *ce qui limite une portion de ligne est un point.*

6. — Les exemples précédents ne donnent qu'une image grossière des points, des lignes et des surfaces géométriques. Si minces que soient des feuilles de papier, on peut en faire d'épais volumes; si ténus que soient les fils de chanvre, on peut en faire des câbles; si petits que soient les grains de farine, on peut en remplir des sacs. Cependant, en géométrie, on imagine que *les surfaces et les lignes n'ont pas d'épaisseur*, que *les points n'ont aucune dimension dans aucun sens* (1).

En outre, on fait abstraction de la substance du solide que l'on étudie (boule de fer ou de bois), de sa couleur, de sa dureté, etc. On ne considère que **sa forme.**

7. Résumé. — Ce qui limite un corps est une surface;
Ce qui limite une portion de surface est une ligne;
— une portion de ligne est un point.

(1) De tels corps, sans épaisseur, n'existent pas dans la nature. Signalons cependant qu'une étoile apparaît toujours comme un point sans dimension, même dans les lunettes les plus puissantes.

8. Définition par le mouvement. — *Un point qui se déplace engendre une ligne* : extrémité du bâton de craie sur le tableau, trajectoire d'un point lumineux (fusée, étoile filante).

Une ligne qui se déplace engendre une surface : jouet aquarium; fil à couper le beurre : le fil sectionne une motte de beurre, engendrant la surface qui sépare les deux morceaux.

9. Figure géométrique. — On appelle **figure géométrique** un ensemble de surfaces, de lignes et de points, qu'on étudie au point de vue de la forme, par exemple un dé à jouer ou le solide construit à l'exercice 10 ci-après.

Exercices et manipulations.

10. — Coller une feuille de papier quadrillé sur du carton mince et découper la figure de gauche (fig. 2), plier suivant le pointillé et assembler comme l'indique la figure de droite (en employant des bandes de papier gommé). Trouver sur le solide obtenu des surfaces, des lignes, des points.

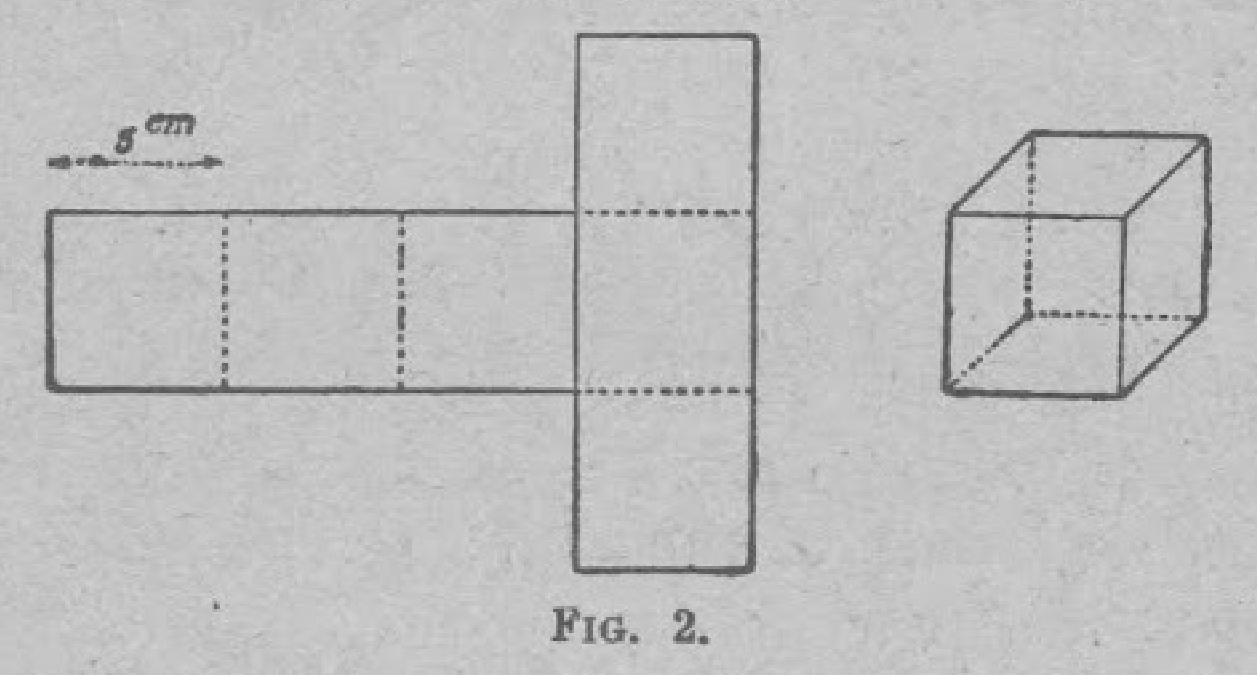


FIG. 2.

11. — Découper la figure de gauche (fig. 3); enrouler et coller de façon à obtenir la figure de droite. On a une portion de surface limitée par deux

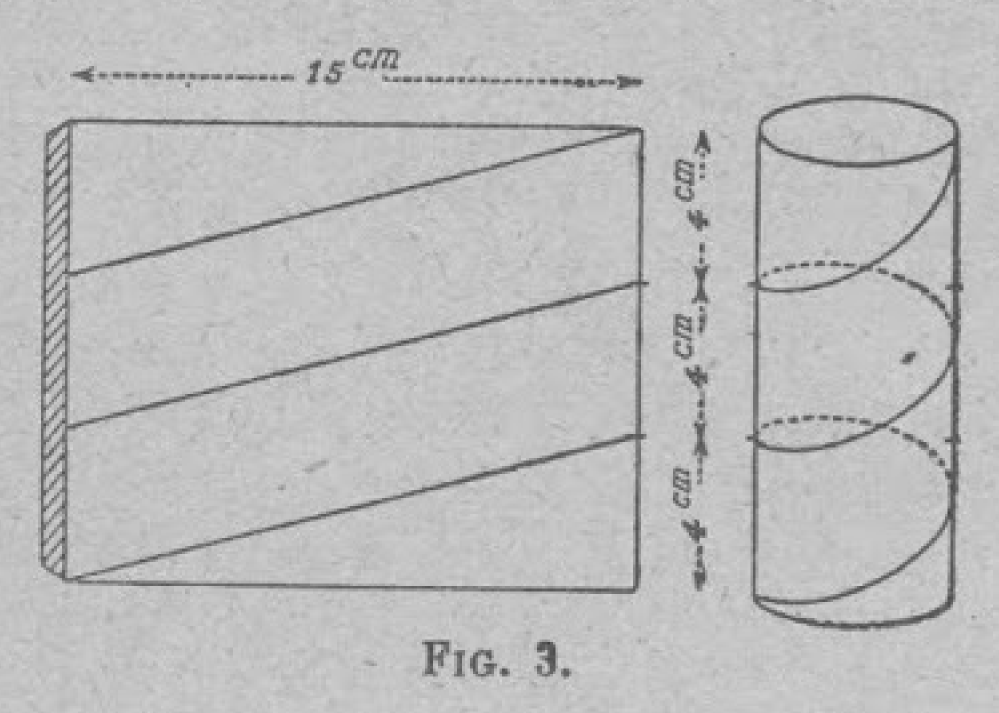


FIG. 3.

lignes (les deux bords) et sur laquelle est tracée une ligne. Cette surface a un endroit et un envers.

12. — Prendre une bande de papier, la tordre et réunir (coller) deux

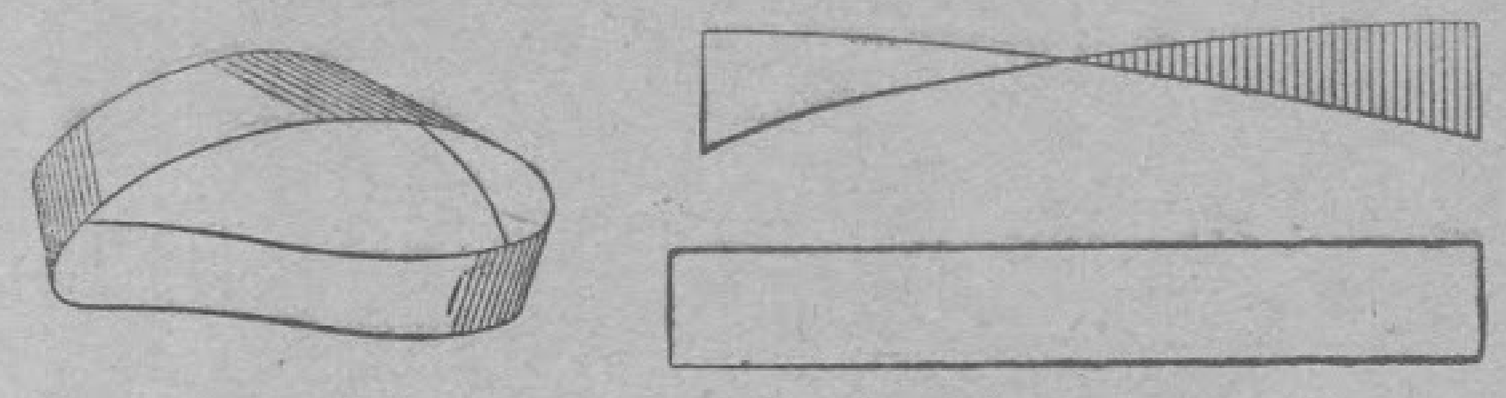


FIG. 4.

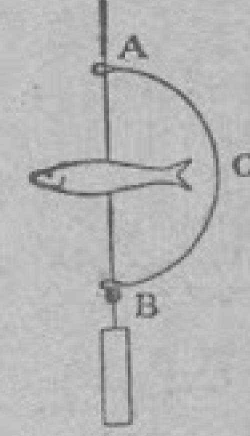


FIG. 5.

bords opposés. On obtient une portion de surface qui n'a qu'un seul bord, elle n'a aussi qu'un seul côté (on ne peut distinguer un endroit et un envers). Différence avec l'exercice précédent.

13. Jouet aquarium. — Un fil de fer terminé par deux anneaux A et B peut tourner autour d'une tige que l'on tient immobile et à laquelle est fixée un petit poisson (fer-blanc ou carton). Quand le fil tourne rapidement, on croit voir une boule à l'intérieur de laquelle se tient le poisson.

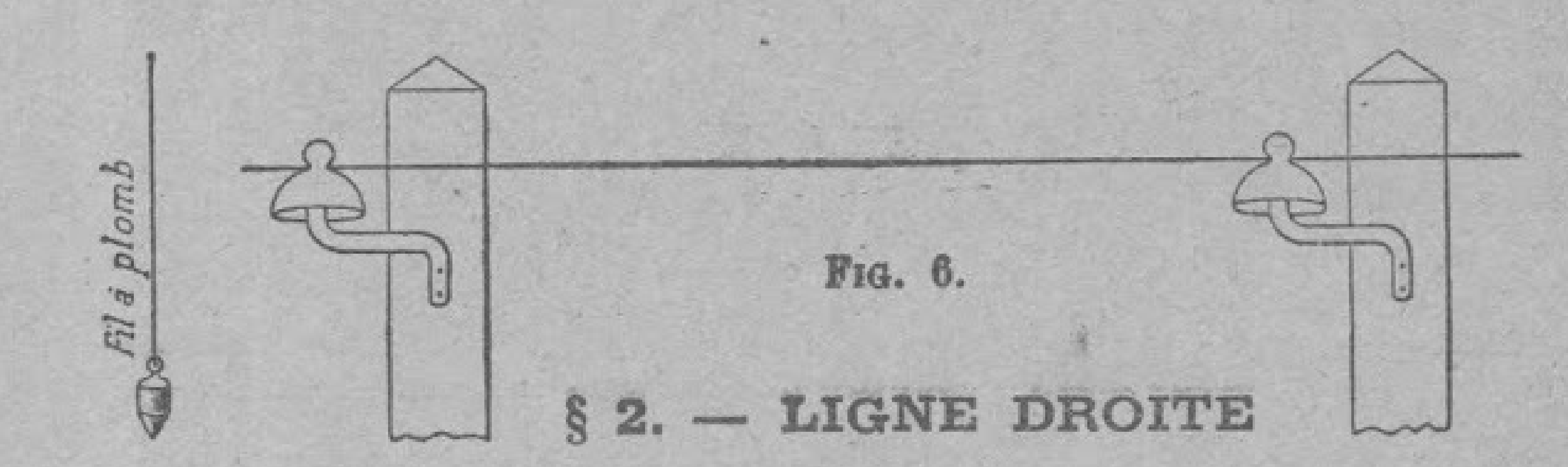


FIG. 6.

§ 2. — LIGNE DROITE

Un fil mince tendu donne l'image d'une droite, image imparfaite, car la droite n'a aucune épaisseur et doit être regardée comme illimitée dans les deux sens.

14. Propriété fondamentale de la droite : — *Par deux points on peut faire passer une droite et une seule.*

15. CONSÉQUENCE. — *Si deux droites ont deux points en commun elles coïncident entièrement.*
Deux droites peuvent glisser l'une sur l'autre.

16. EXEMPLES. — Glissement de l'arête d'un tiroir dans sa rainure.

Glissement d'une tringle de brise-bise dans son fourreau.

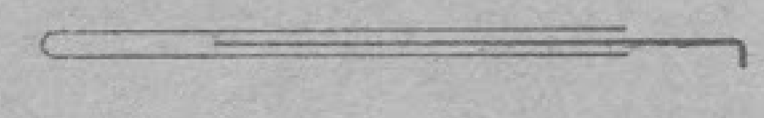


FIG. 7.

Coïncidence des arêtes de deux règles. — Prolonger une portion de droite tracée sur le cahier.

Quand on fixe deux points A, B d'un solide, le corps peut encore bouger. Sur l'exemple de la porte, on voit qu'il y a une ligne de points qui ne

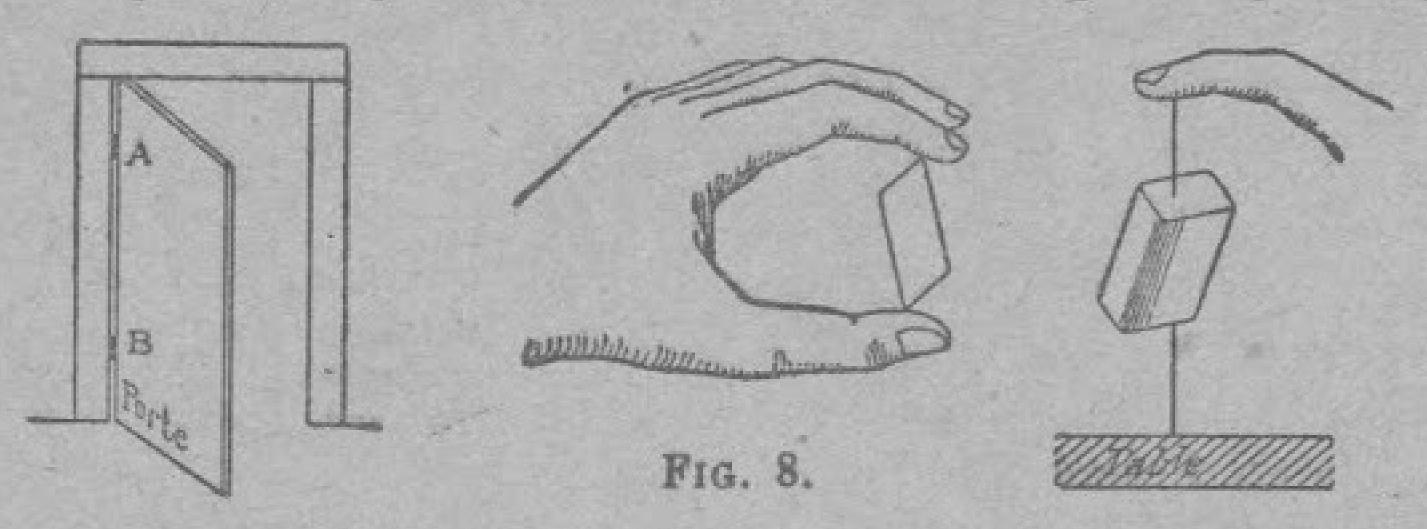


FIG. 8.

bouge pas; ces points sont en ligne droite. Peut-on mettre une troisième charnière, et où?

Un corps traversé par une longue aiguille rectiligne peut tourner autour de cette aiguille. On dit qu'une droite peut servir d'*axe de rotation.* Exemple : gomme percée d'une aiguille.

17. REMARQUE. — Un rayon visuel est une ligne droite.

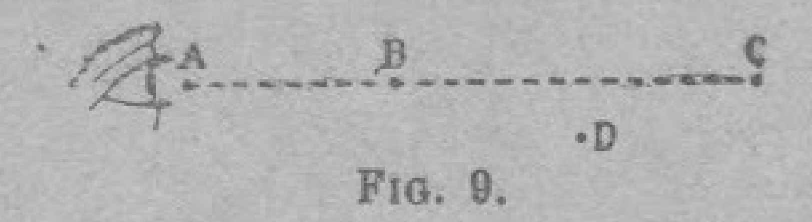


FIG. 9.

Application : Jalonner une droite sur le terrain.

18. VÉRIFICATION D'UNE RÈGLE : fil tendu.
rayon visuel.
retournement.

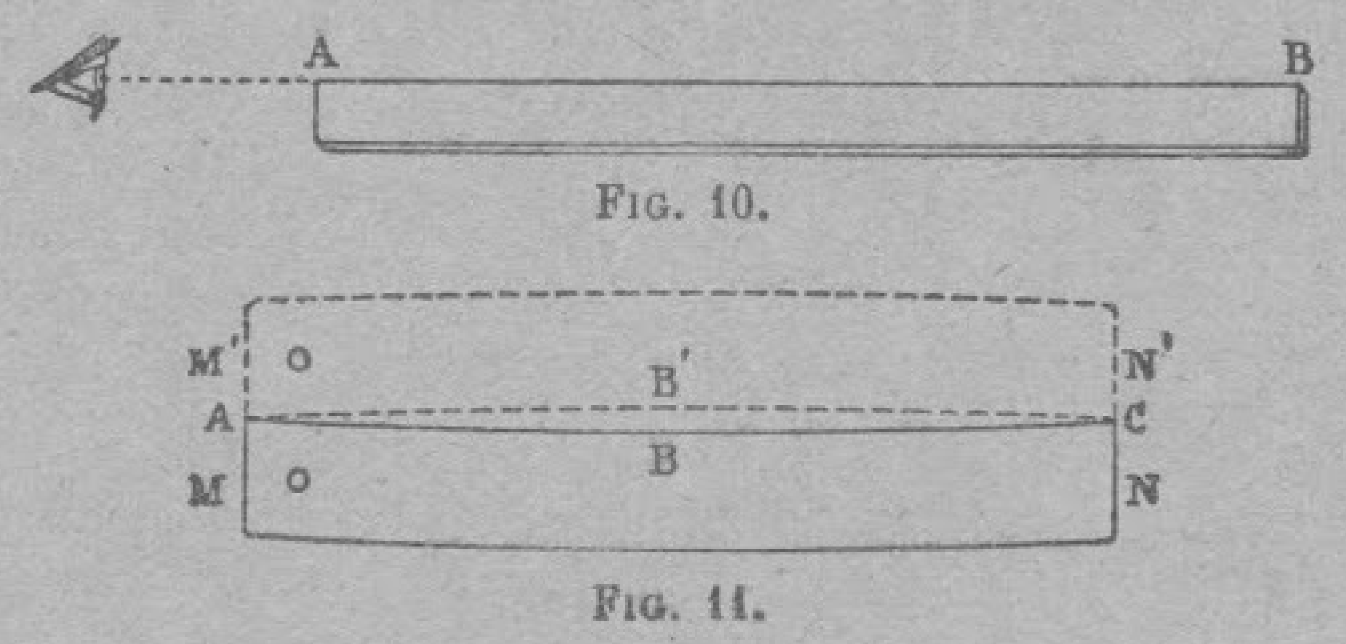
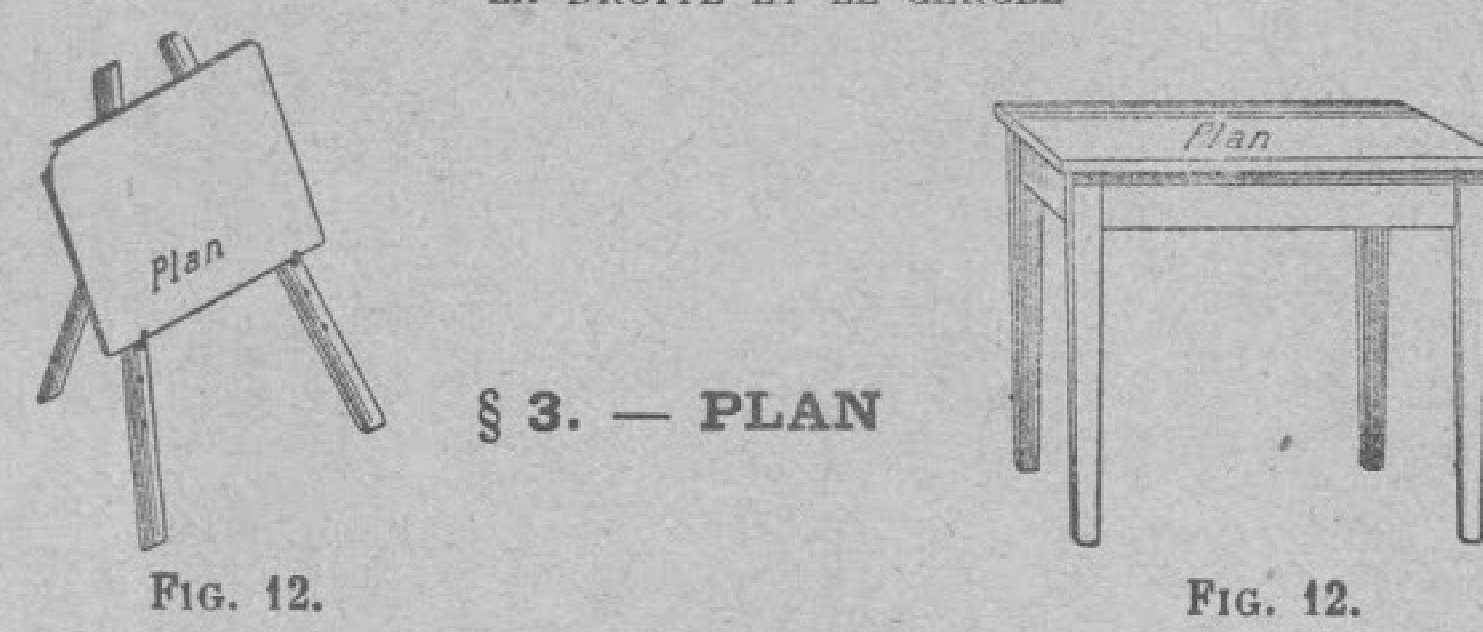


FIG. 10.

FIG. 11.



§ 3. — PLAN

FIG. 12. FIG. 12.

19. Le plan est une surface dont la notion nous est donnée par :
la surface d'un liquide en repos (eau dans une cuvette),
la surface d'une table bien rabotée, du tableau,
la surface d'une glace bien polie, etc.

Sur un plan on peut tracer autant de droites que l'on veut (par exemple, sur le tableau). En pratique, le maçon vérifie la surface d'un mur en y appliquant une règle dans différentes positions; le menuisier vérifie la surface d'une planche (par exemple, d'une planche à dessin) en la regardant de profil (son rayon visuel remplace la règle). En résumé nous pouvons énoncer la règle suivante :

20. Règle. — *La droite qui joint deux points pris au hasard dans un plan y est contenue tout entière.*

Toutes les surfaces planes que nous rencontrons en pratique sont limitées, mais en géométrie nous devons regarder un plan comme **illimité.**

Deux plans quelconques peuvent coïncider dans toute leur étendue; la coïncidence étant obtenue, on peut, sans qu'elle cesse, faire glisser les plans l'un sur l'autre. En outre, avant de les appliquer l'un sur l'autre, on peut en retourner un.

EXEMPLE : feuille de carton sur une table.

21. Figure plane. — On appelle **figure plane** une figure tracée sur un plan.

EXEMPLES. — Une carte de géographie, le plan d'une ville (supposés tracés sur un carton rigide).

Exercices et manipulations.

22. — Vérifier qu'une feuille de papier peut être pliée suivant une droite.

23. APPLICATION. — Déterminer, au moyen du pliage, la droite passant par deux points marqués sur une feuille de papier

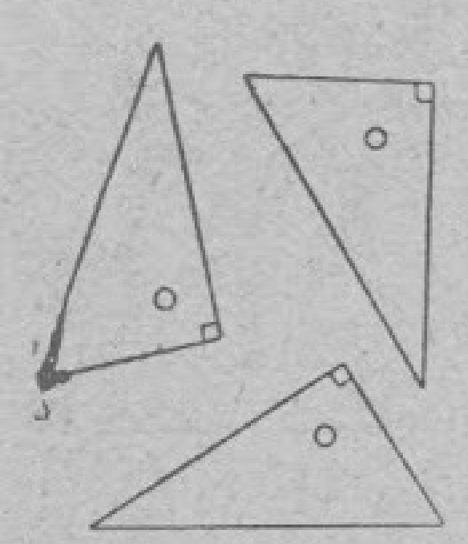


FIG. 13.

§ 4.
FIGURES ÉGALES



FIG. 13.

24. — On dit que deux figures sont *égales* quand elles sont *superposables*, c'est-à-dire qu'*on peut les faire coïncider.*

EXEMPLES. — Tous les dessins imprimés avec le même cliché sont des figures égales (timbres-poste, figures des divers exemplaires d'un même ouvrage). Si on découpe un dessin dans une feuille de papier double, triple,... on obtient deux, trois,... figures égales (découpages à l'emporte-pièce).

Deux statuettes sortant du même moule sont des figures égales : en fait, on ne peut pas les superposer, mais leurs surfaces ont coïncidé l'une et l'autre avec la surface en creux du moule. On dit que : si deux figures sont chacune égale à une troisième (le moule), elles sont égales entre elles. — Autre exemple : pièces de monnaie.

25. Orientation de deux figures planes égales. — Pour s'assurer si des figures tracées sur un même plan (tableau ou cahier) sont égales, on peut calquer l'une et voir si le calque est superposable à l'autre. Dans le cas de l'égalité, la superposition peut être réalisée :

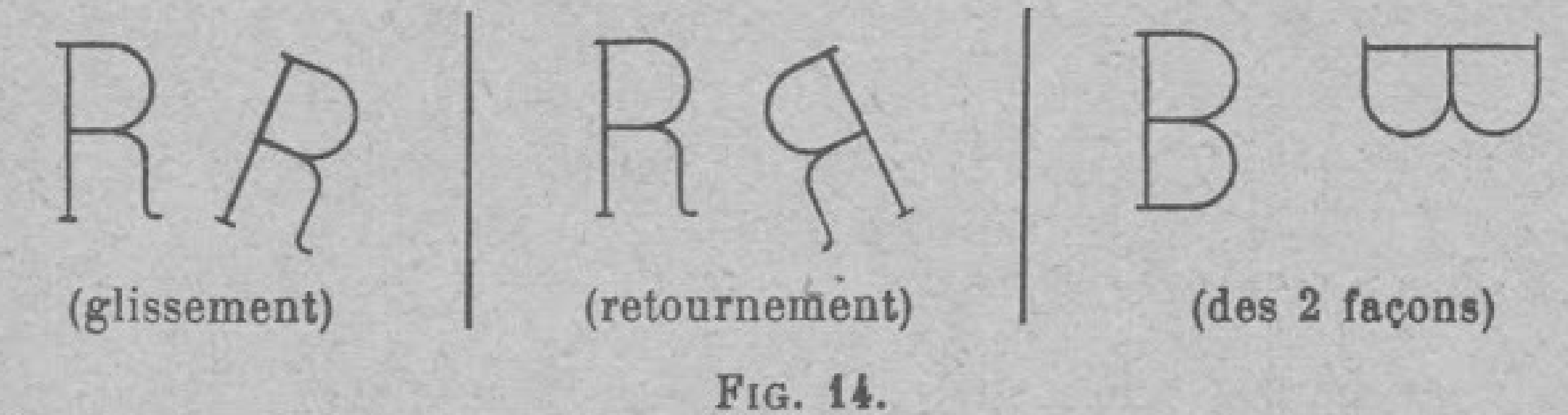


FIG. 14.

Soit par simple glissement du calque (et on dit que les figures ont même orientation);

Soit après retournement du calque (et on dit que les figures sont d'orientation différente).

Dans certains cas, la superposition peut même être réalisée de **deux façons.**

26. Remarque. — Pour changer l'orientation d'un dessin, il suffit de le regarder par transparence, **à l'envers**, — ou encore de le regarder par réflexion sur un miroir.

Avec un cliché négatif (plaque ou pellicule), on peut tirer deux épreuves égales, mais d'orientations différentes.

Exercices et manipulations.

27. — Tracer une figure sur du papier quadrillé et reproduire une

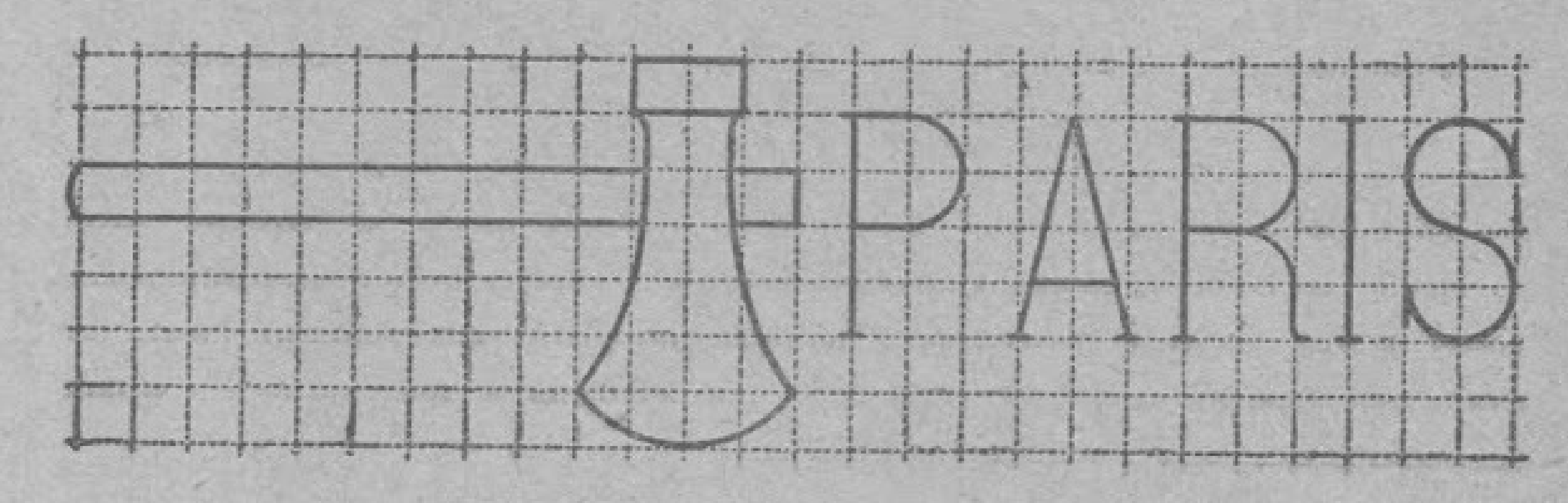


Fig. 15.

figure égale : 1° avec la même orientation; 2° avec une orientation différente.

28. — Écrire un mot à l'encre; le sécher immédiatement au buvard. Comment, sur le buvard, peut-on lire le mot à l'endroit?

29. — Tracer une figure (carte de France, par exemple), la calquer, et la reproduire en retournant le calque.

30. — Quelles sont les lettres majuscules qui (comme la lettre B de la figure 14) peuvent être appliquées de deux façons sur une lettre égale?

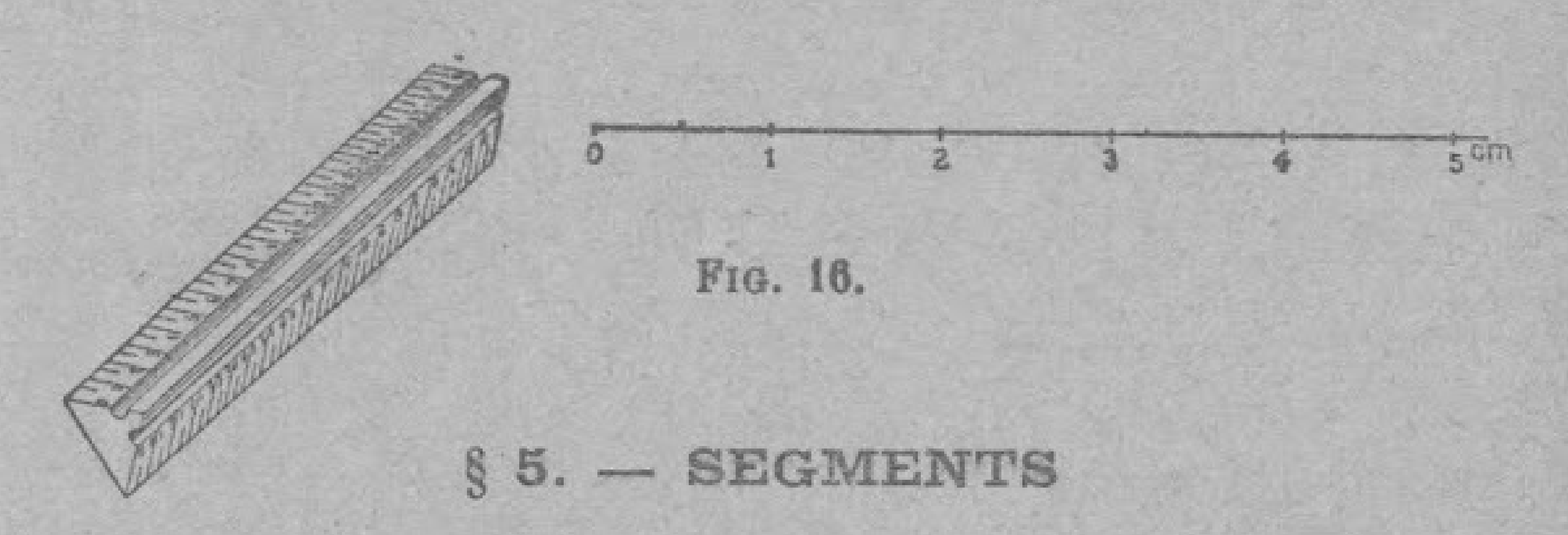


Fig. 16.

§ 5. — SEGMENTS

31. — On appelle **demi-droite** une portion de droite illimitée d'un côté.

On appelle **segment** une portion de droite limitée par deux points appelés extrémités du segment.

On appelle **ligne brisée** une succession ininterrompue de segments.

On appelle **ligne courbe** une ligne qui n'est droite dans aucune de ses parties.

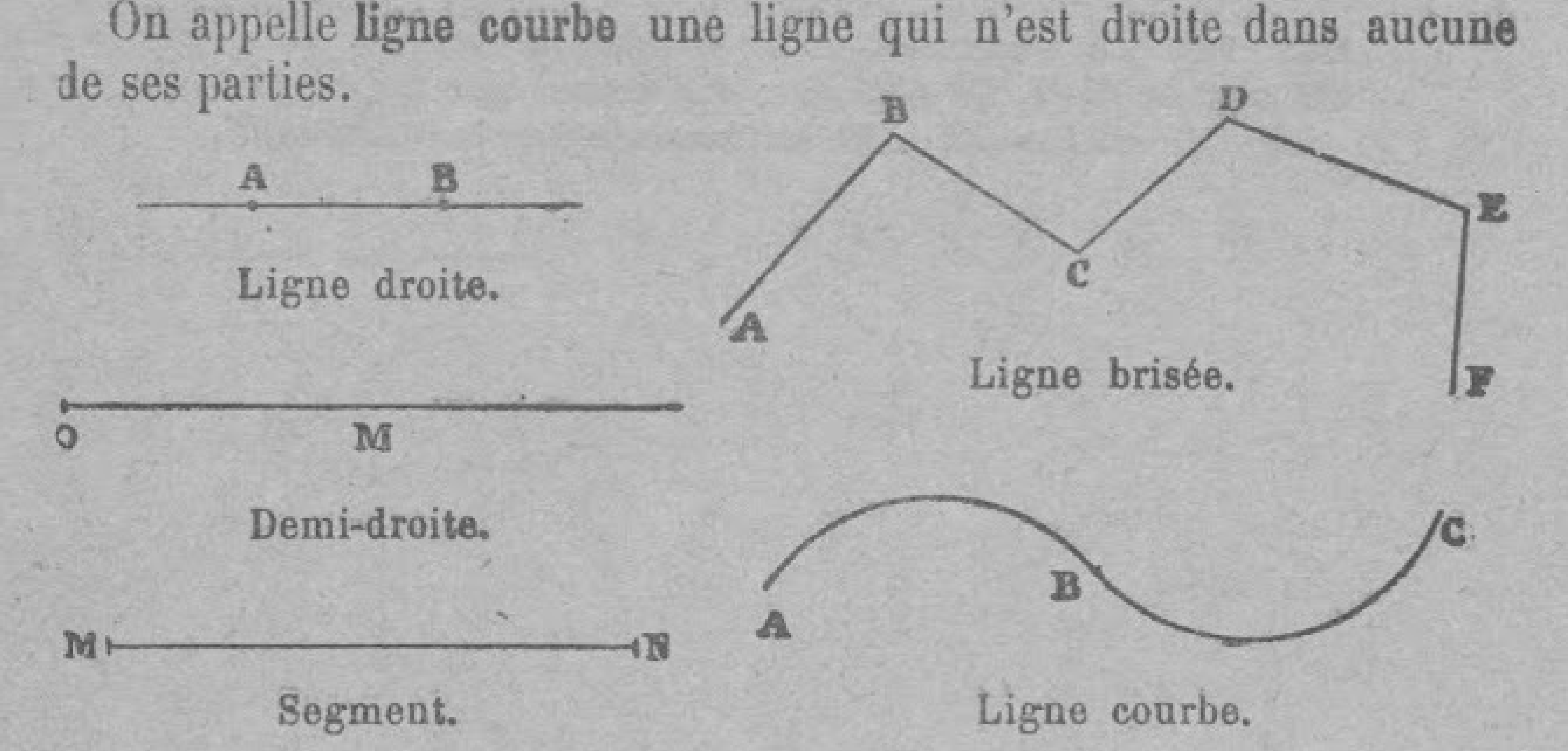


Fig. 17.

32. Comparaison de deux segments. — Pour comparer deux segments, on les porte l'un sur l'autre de façon qu'ils aient une extrémité commune (employer une bande de papier).

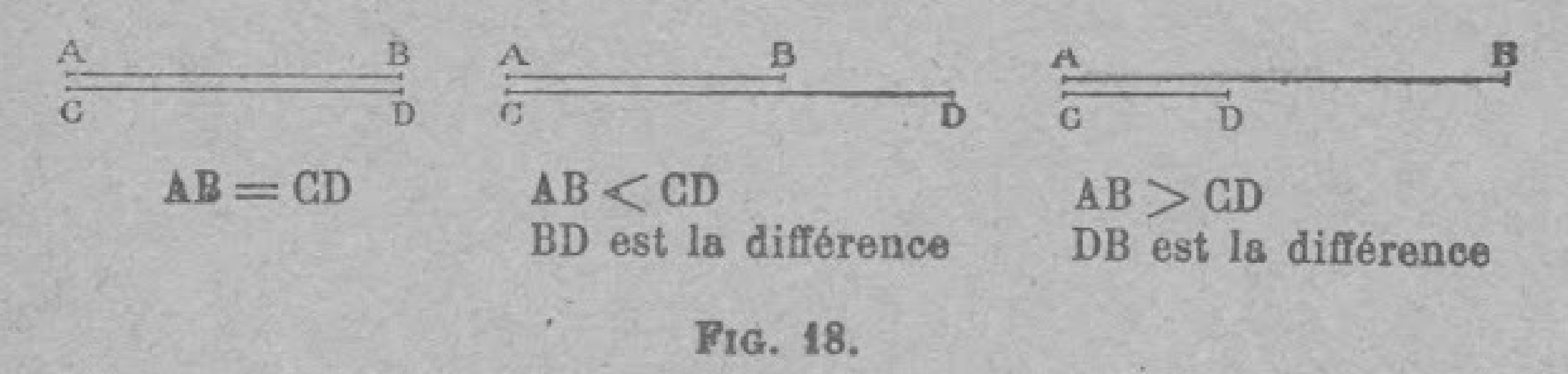


Fig. 18.

33. Addition de segments. — Pour additionner des segments on les porte bout à bout sur la même droite.

34. Mesure des segments. — Pour mesurer des segments, il faut choisir un segment-unité. En système métrique, c'est le mètre (m). En dessin, on prend le centimètre ou le millimètre (on utilise un double décimètre).

Le nombre qui mesure un segment s'appelle sa longueur : un segment de 3 m; un segment de 7 cm.

On appelle *distance de deux points* la longueur du segment qui les joint.

Remarque. — Le compas, et, de préférence, le compas à pointes sèches (plus précis) peut remplacer la bande de papier pour la comparaison et l'addition de deux segments.

35. — Rapport de deux segments.

I. Sur une demi-droite Ax, portons bout à bout 3 fois le segment CD

(fig. 19). Le segment AB obtenu s'appelle le *triple* de CD; inversement, CD est le *tiers* de AB. On dit aussi que le *rapport de* AB *à* CD *est 3.*

Si CD *est l'unité,* AB *est mesuré par le nombre 3.*

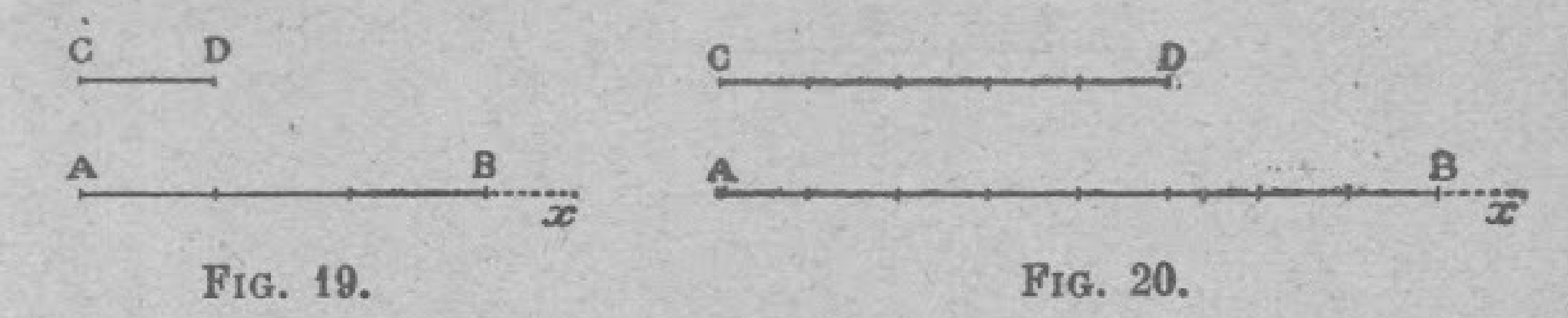


Fig. 19. Fig. 20.

II. Divisons un segment CD en 5 parties égales, portons bout à bout 8 de ces parties, et soit AB le segment obtenu, on dit que AB est les $\frac{8}{5}$ de CD; inversement CD est les $\frac{5}{8}$ de AB. On dit aussi que *le rapport de* AB *à* CD *est* $\frac{8}{5}$.

Si CD *est l'unité,* AB *est mesuré par le nombre* $\frac{8}{5}$.

36. — Diviseur commun à deux segments donnés.

Soient deux segments a et b.

1er Cas a, b $\left(\frac{a}{b}\right)=5$; $\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{5}$

Fig. 21.

Si b est contenu un nombre entier de fois, 5 par exemple, dans a, on dit que *b est un diviseur de a* (ici, b est le $\frac{1}{5}$ de a).

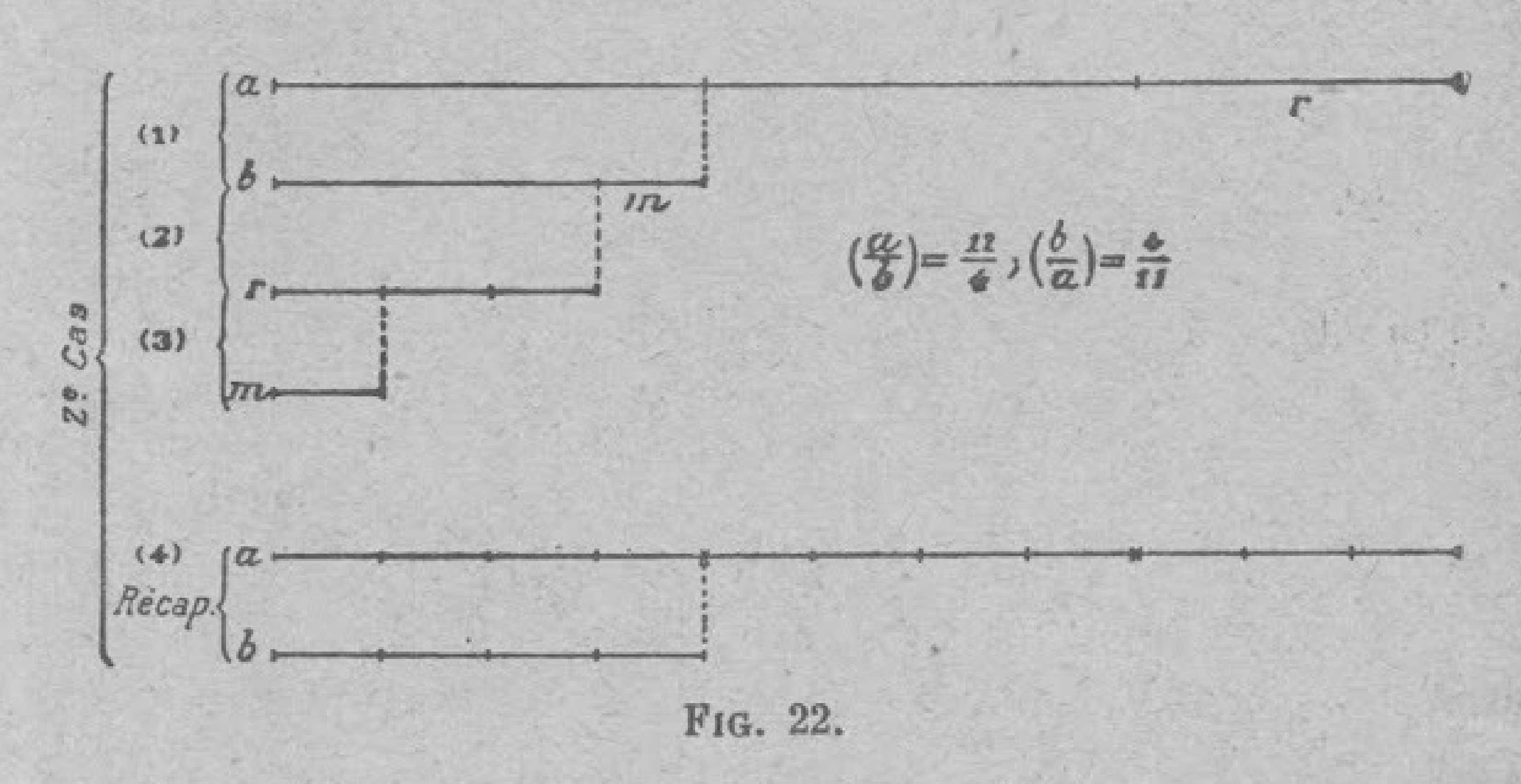


Fig. 22.

Si a contient 2 fois b, plus un reste r (opération 1), on cherche combien de fois ce reste est contenu dans b; ici b contient 1 fois r, plus un reste m (opération 2). Cherchons combien de fois m est contenu dans r : on trouve

3 exactement (opération 3). En portant sur a et b le segment m (opération récapitulative 4), on voit qu'il est contenu 4 fois dans b et 11 fois dans a; m est donc un diviseur commun à a et b.

Quel est le rapport de a à b?

37. Remarque. — On peut imaginer que les opérations précédentes se feront toujours avec un reste, mais, en pratique, on trouvera un diviseur commun au bout de quelques opérations.

Exercices. — 38. — Tracer 3 segments et construire leur somme (au moyen de la bande de papier). Mesurer ces 3 segments (double décimètre) et additionner les nombres trouvés; mesurer la somme des segments, et comparer. Le premier procédé est plus rapide et plus précis.

39. — On marque sur une droite 3 points O, A, B, dans l'ordre indiqué; soit M le milieu de AB. Connaissant OA et OB, calculer OM. On traitera d'abord un exemple : OA = 5, OB = 8 (unité : cm) et on énoncera ensuite le résultat dans le cas général.

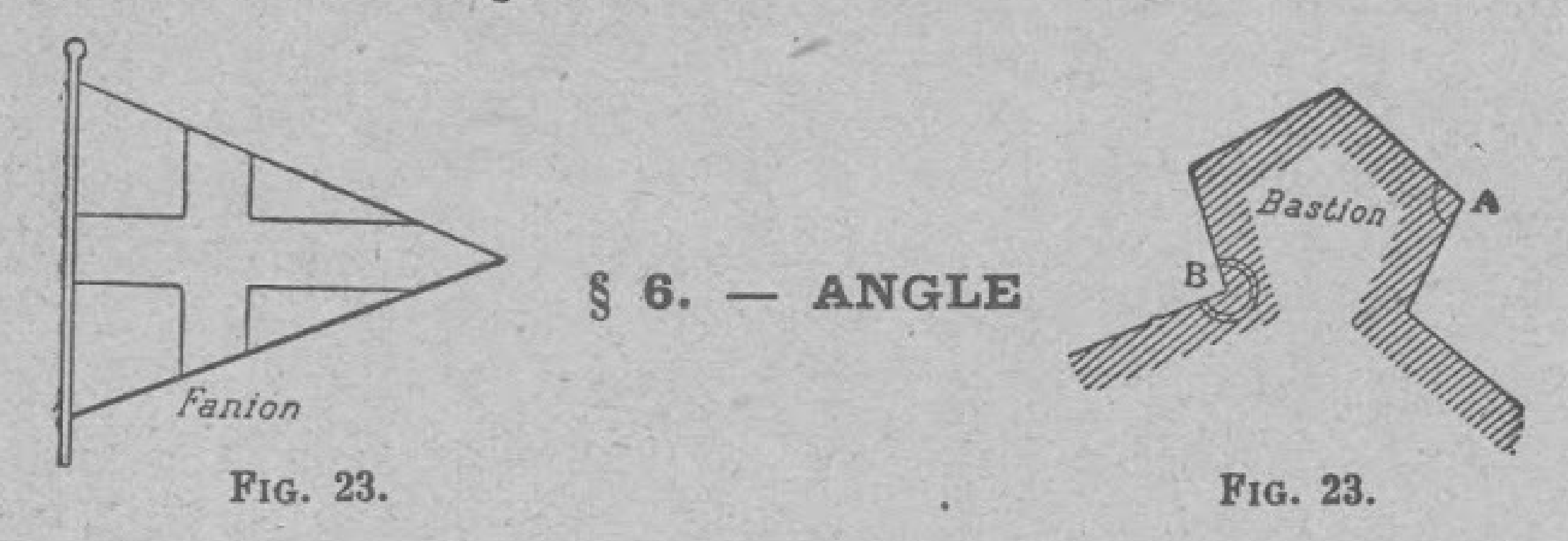


Fig. 23. Fig. 23.

§ 6. — ANGLE

40. Définitions. — On appelle **angle** une portion de plan limitée par deux demi-droites ayant une même origine. Ces demi-droites s'appellent **côtés**, et l'origine commune **sommet.** On écrit : $\widehat{AOB}$ (sommet O, côtés OA et OB).

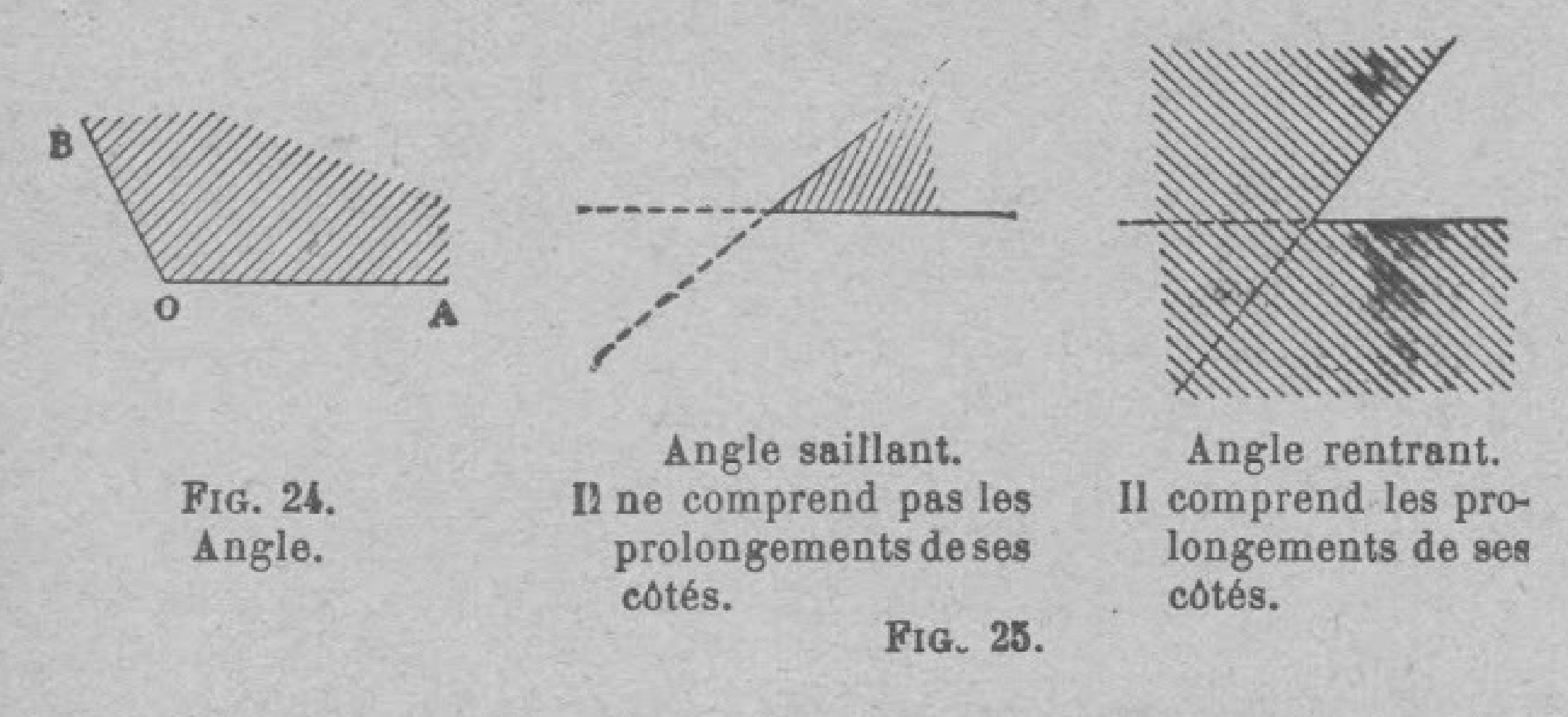


Fig. 24. Angle.

Angle saillant. Il ne comprend pas les prolongements de ses côtés.

Angle rentrant. Il comprend les prolongements de ses côtés.

Fig. 25.

Deux demi-droites issues d'un même point définissent deux angles : l'un est **saillant,** l'autre est **rentrant.**

Lorsque les demi-droites sont dans le prolongement l'une de

1. Angle nul. 2. Angle saillant. 3. Angle plat.

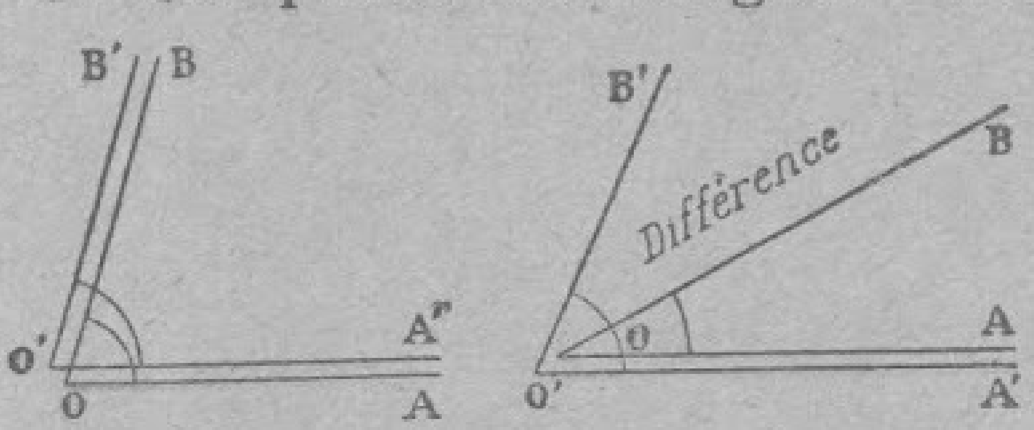
4. Angle rentrant.

5. Angle couvrant tout le plan.
Formes successives d'un angle qui augmente sans cesse de l'angle nul à l'angle couvrant tout le plan.

FIG. 26.

l'autre, on dit que l'angle est *plat*. Un angle plat comprend toute la partie du plan située d'un côté d'une droite.

41. Comparaison des angles. — Pour comparer deux angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{A'O'B'}$, on les place l'un sur l'autre de façon à leur donner un côté commun.

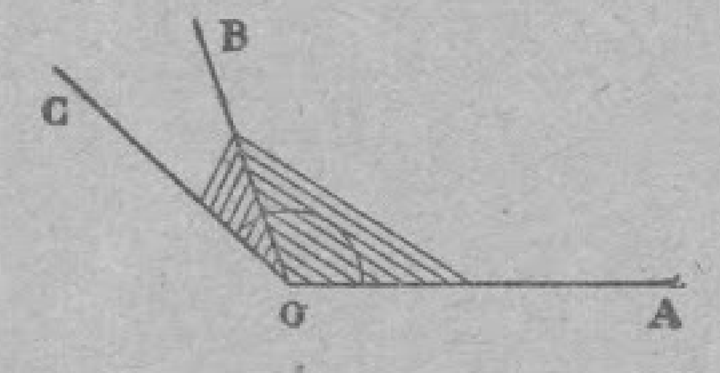


Angles égaux. Angles différents.
FIG. 27. — Comparaison des angles.

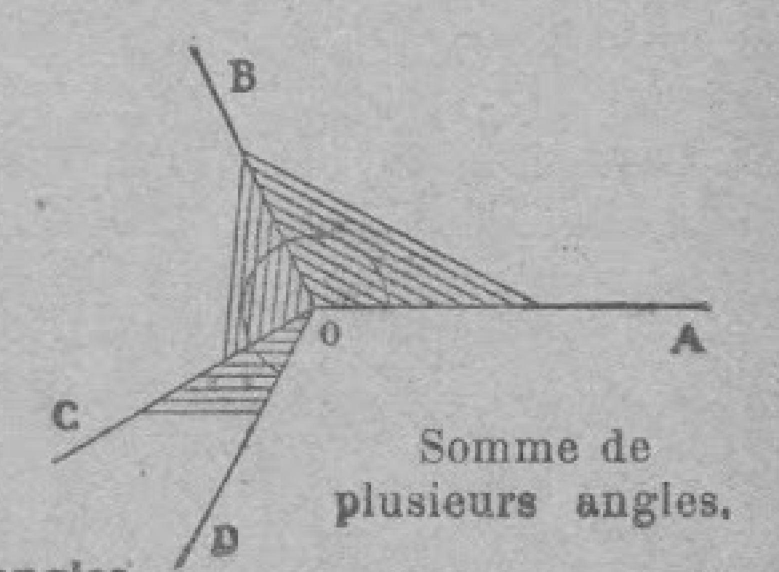
42. Angles adjacents. Addition des angles. — On dit que deux angles sont adjacents quand ils ont même sommet, un côté commun et qu'ils sont de part et d'autre de ce côté commun.

On appelle *somme de deux angles* l'angle total obtenu en les plaçant dans la position d'adjacents.

Pour faire la somme de plusieurs angles, on fait la somme des deux premiers, on lui ajoute le troisième, et ainsi de suite.



Angles adjacents.
Somme de deux angles.



Somme de plusieurs angles.

FIG. 28. — Addition des angles.

Exercices et manipulations.

43. — Donner deux coups de ciseaux dans une feuille de papier de façon à obtenir deux angles, l'un saillant, l'autre rentrant.

44. — Dessiner sur une feuille de papier puis découper le bastion; sur chacune des deux parties du découpage marquer les angles saillants par S et les angles rentrants par R.

45. — Découper un angle dans une feuille de papier (coloré autant que possible) prise en plusieurs épaisseurs, puis construire, par collage, un angle double, triple, quadruple de l'angle donné.

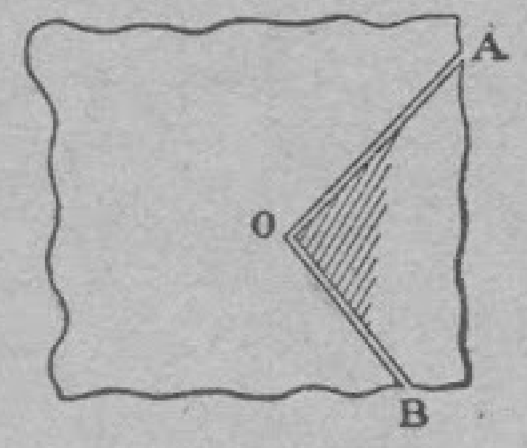


FIG. 29.

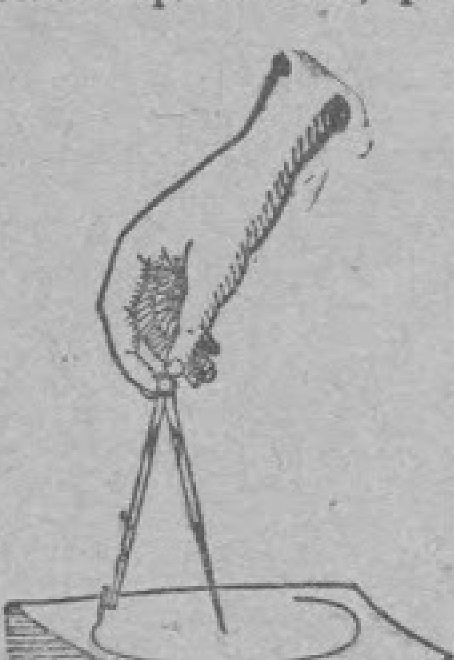


FIG. 30.



FIG. 30.

§ 7. — CERCLE

46. Définitions. — On appelle **cercle** la ligne formée par tous les points qui sont à une même distance d'un point appelé **centre du cercle.** Cette distance s'appelle **rayon du cercle.**

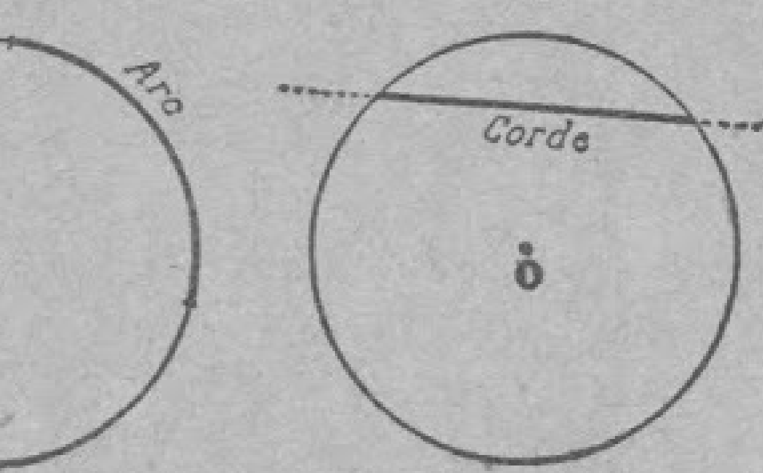


FIG. 31.

On trace un cercle avec un compas.

Toute demi-droite issue du centre O coupe le cercle en un point **A**. OA est un rayon; tous les rayons sont égaux.

On appelle **arc** une portion de cercle.

On appelle **corde** le segment joignant les deux extrémités d'un **arc**; on dit que la corde **sous-tend** l'arc.

On appelle **diamètre** une corde passant par le centre; tous les diamètres sont égaux au double du rayon.

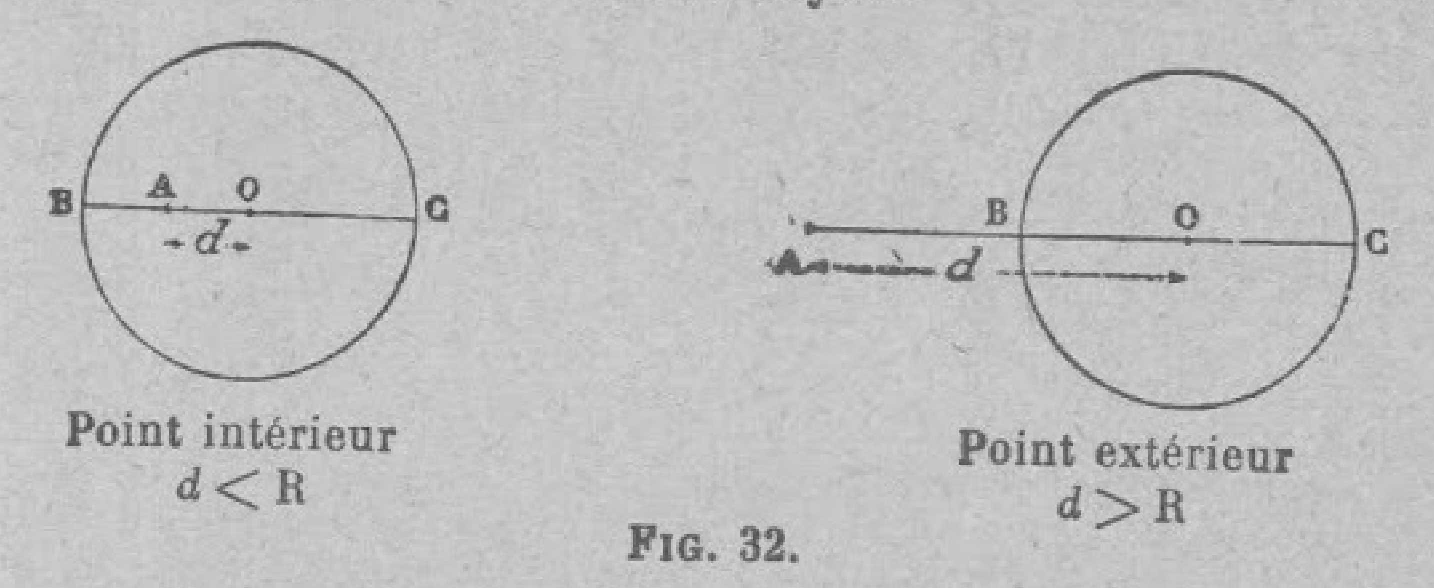


FIG. 32.

I. *Si un point est* **intérieur** *au cercle, sa distance au centre est* **inférieure** *au rayon, et réciproquement.*

(Énoncez cette réciproque).

II. *Si un point est* **extérieur** *au cercle,...*

(Terminez de même.)

Deux cercles qui ont le même rayon sont égaux. On peut les faire glisser l'un sur l'autre (papier calque), les centres restant en coïncidence.

La coïncidence de deux cercles égaux peut être réalisée soit directement, soit par retournement. Le vérifier avec la figure qui est en tête du paragraphe et une pièce de 10 centimes.

47. Comparaison de deux arcs AB, CD.

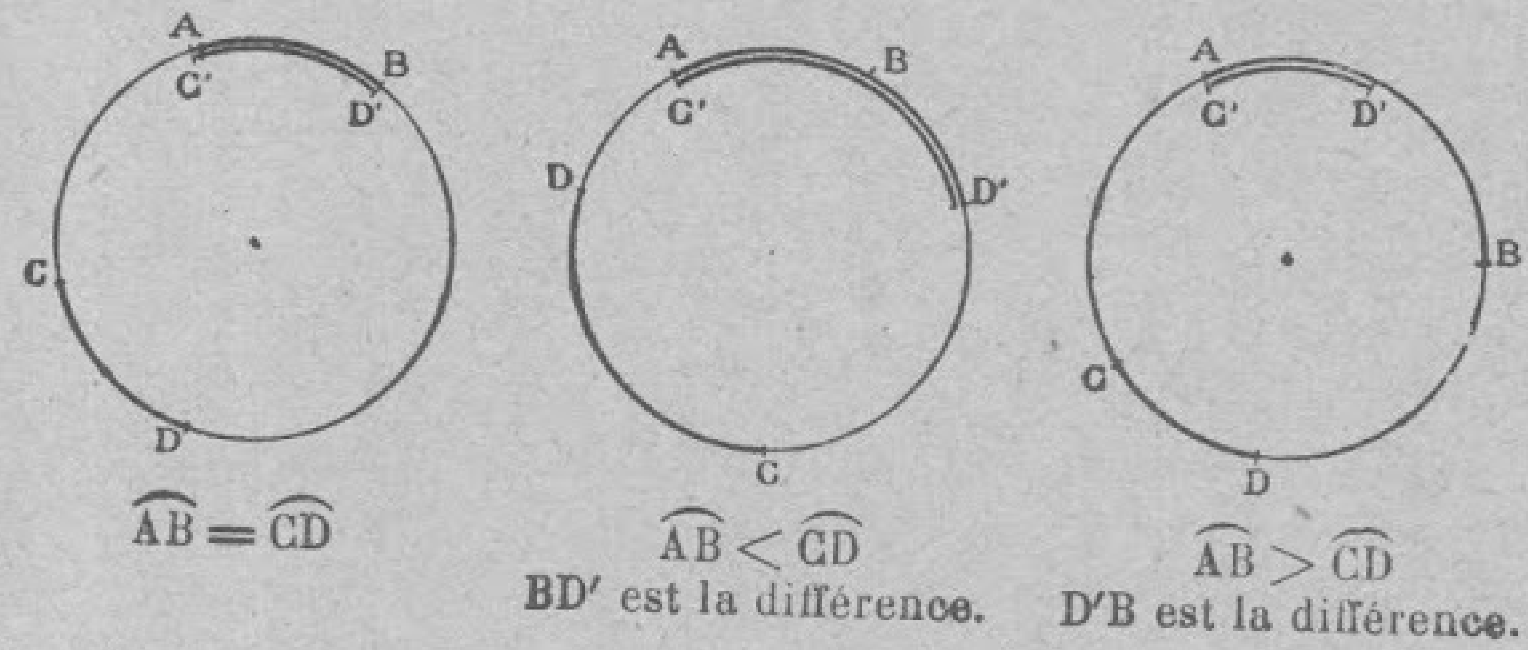


FIG. 33.

48. Addition de deux arcs.

AC est la somme de AB et de BC.

$$\widehat{AC} = \widehat{AB} + \widehat{BC}.$$

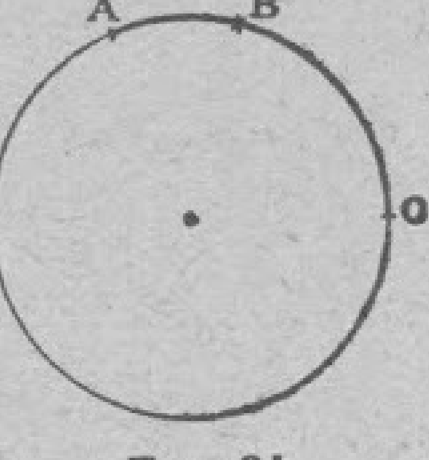


FIG. 34.

49. REMARQUE I. — On constate (*fig.* 31) qu'une corde qui ne passe pas par le centre sous-tend deux arcs inégaux; le plus grand est celui qui est du côté du centre (1).

50. REMARQUE II. — On peut vérifier qu'un diamètre est plus grand qu'une corde quelconque du cercle; les deux arcs sous-tendus par un diamètre sont égaux (1).

Exercices.

51. — Tracer plusieurs cercles de 45mm de rayon, passant par un point donné A. Où se trouvent les centres de tous les cercles de 45mm de rayon passant par A?

52. — Marquer 2 points A et B à 52mm l'un de l'autre. Tracer un cercle de 45mm de rayon passant par les 2 points (2 solutions).

53. — Marquer 2 points A et B à 48mm l'un de l'autre. Trouver un point qui soit à 60mm de A et à 75mm de B.

§ 8. — UNITÉS D'ARC. UNITÉS D'ANGLE

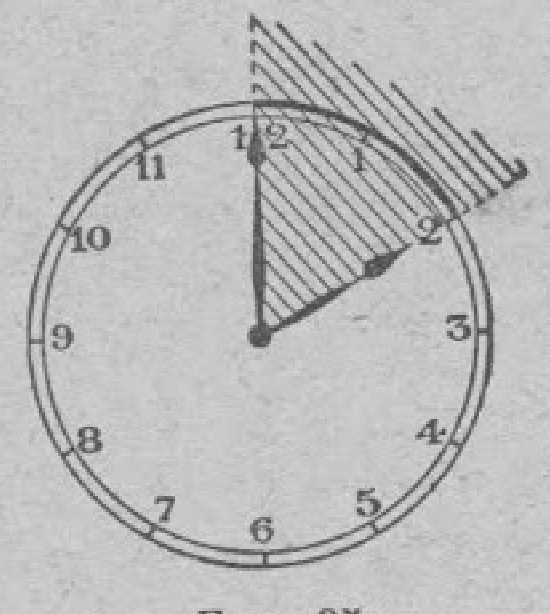


FIG. 35.

Angle au centre.

54. Définition. — *On appelle* **angle au centre** *un angle qui a son sommet au centre d'un cercle.* L'arc compris entre les côtés s'appelle *arc intercepté*.

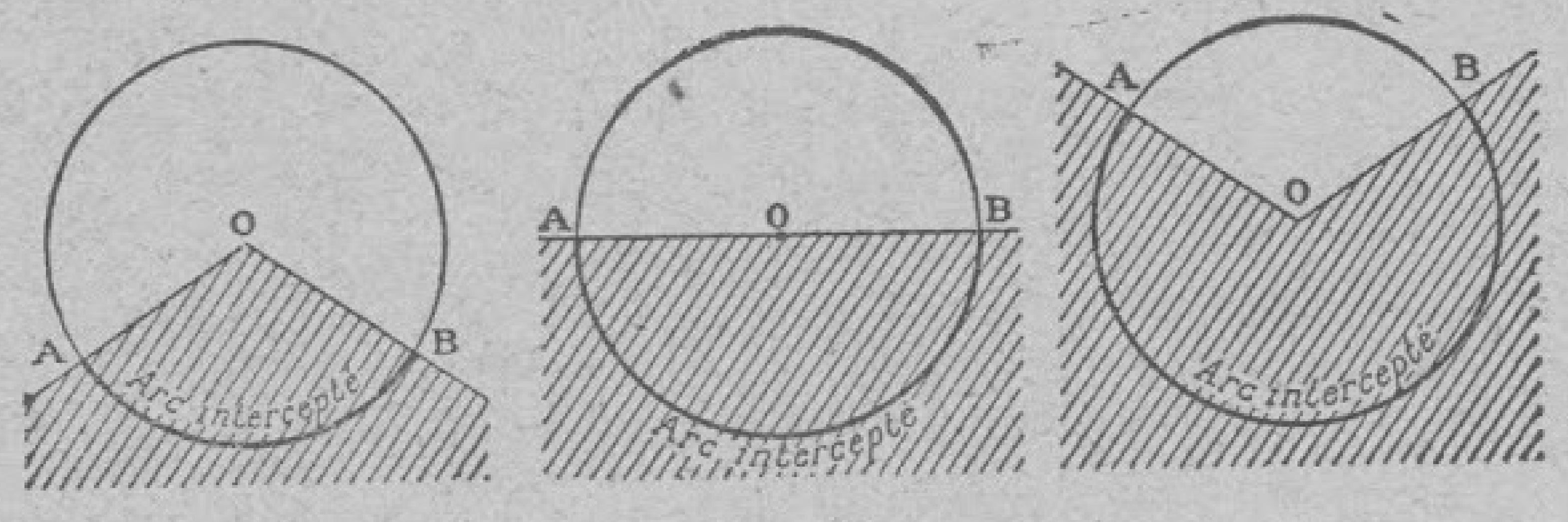
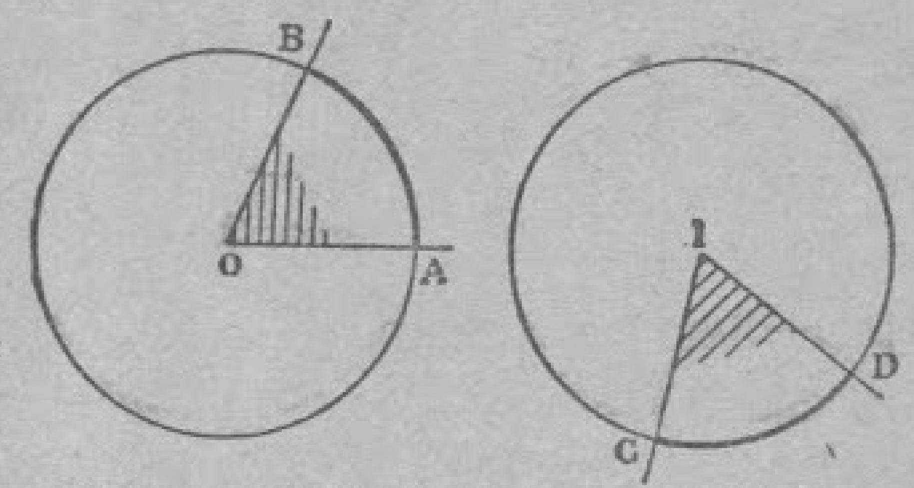


FIG. 36.

(1) Pour le moment, nous nous bornons à vérifier ces propriétés; elles

55. Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, si deux angles au centre sont égaux, les arcs interceptés sont égaux.*



Hypothèse commune : Rayons égaux.

$\widehat{AOB} = \widehat{CID} \mid \widehat{AB} = \widehat{CD}$

→ (Th. direct)
← (Th. récip.)

Fig. 37.

Montrer que la superposition des angles entraîne celle des arcs.

56. Théorème réciproque. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, si deux arcs sont égaux, les angles au centre qui les interceptent sont égaux.* (Démonstration par superposition.)

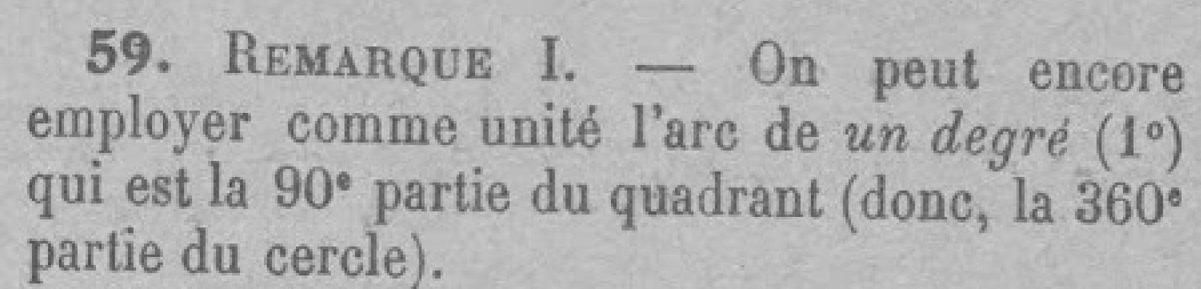
57. Exercice. — Vérifier (papier calque) les théorèmes précédent.

I. Unités d'arc.

58. — L'unité d'arc est le **quadrant.** Le quadrant est le quart du cercle.

Grade. On appelle arc de *un grade* (1^{gr}) la centième partie du quadrant (c'est-à-dire la 400e partie du cercle). Ses sous-multiples sont décimaux et s'appellent *décigrade, centigrade, milligrade.*

Fig. 38.



59. Remarque I. — On peut encore employer comme unité l'arc de *un degré* (1°) qui est la 90e partie du quadrant (donc, la 360e partie du cercle).

L'arc de un degré est divisé en 60 arcs de *une minute* (1′), l'arc de une minute est divisé en 60 arcs de *une seconde* (1″).

60. Remarque II. — Il est clair que la longueur d'un arc de 1 grade, de 1 degré, de 1 minute, etc., est d'autant plus grande que le rayon du cercle considéré est plus grand; ainsi, sur le méridien terrestre :

1° l'arc de 1 grade a pour longueur 100 km;

2° l'arc de 1 minute a une longueur de 1 850 m; c'est ce qu'on appelle le *mille marin.*

seront démontrées par la suite de manière à pouvoir, à leur tour, être utilisées pour la démonstration de propriétés plus compliquées.

II. Unités d'angle.

61. — L'unité d'angle est **l'angle droit** (1^D). Un angle droit est la moitié d'un angle plat.

Un angle de 4 droits comprend tout le plan.

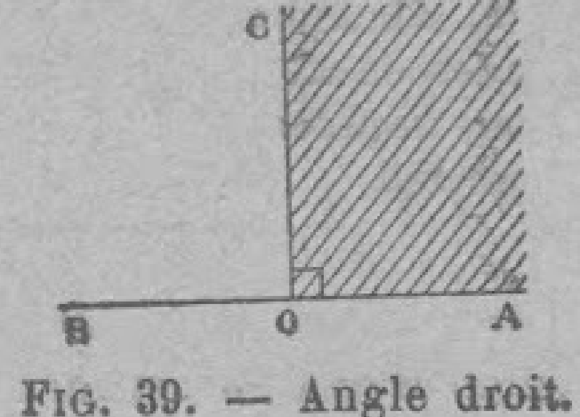


Fig. 39. — Angle droit.

62. Grade. — On appelle angle de *un grade* (1^{gr}) la centième partie de l'angle droit. Ses sous-multiples sont décimaux et s'appellent *décigrade, centigrade, milligrade.*

63. Remarque. — On peut encore employer comme unité d'angle l'angle de *un degré* (1°), qui est la **90° partie de l'angle droit; il se subdivise en 60 angles de une minute (1′); l'angle de une minute en 60 angles de une seconde (1″).**

III. Usage du rapporteur.

64. — La figure montre qu'un angle au centre $\widehat{AOB}$ d'un quart d'angle droit intercepte un arc $\widehat{AB}$ d'un quart de quadrant; l'*un et l'autre valent* 25^{gr}.

De même un angle au centre $\widehat{COD}$ d'un tiers d'angle droit intercepte un arc $\widehat{CD}$ d'un tiers de quadrant; *l'un et l'autre valent 30°.* On peut donc énoncer la règle suivante :

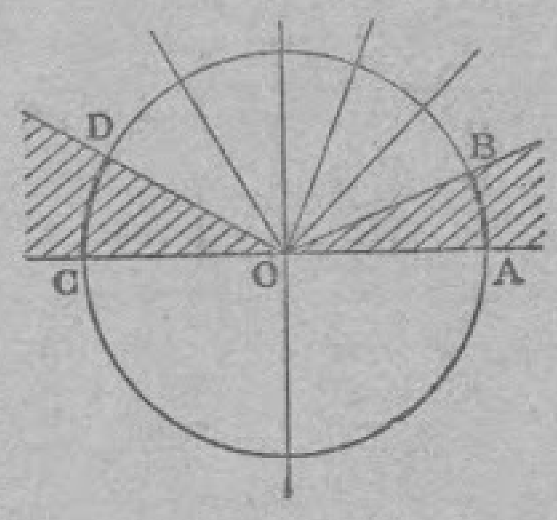


Fig. 40.

65. Règle. — *Un angle au centre et l'arc intercepté sont mesurés par le même nombre de grades (ou de degrés).*

Cette règle explique comment le même instrument (rapporteur) peut servir indifféremment à mesurer un angle ou un arc.

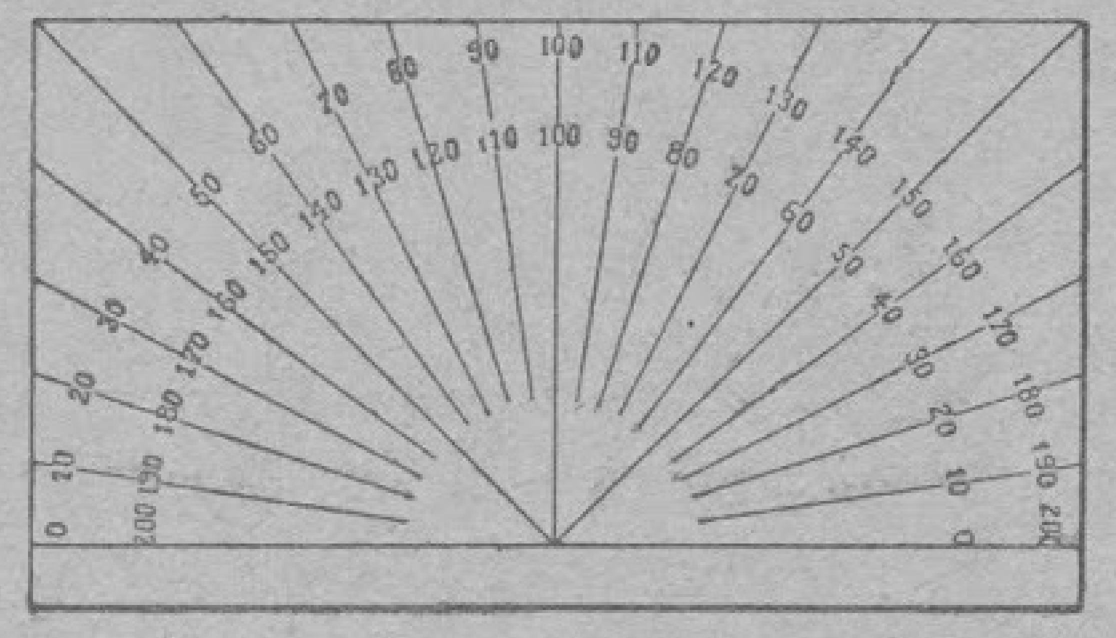


Fig. 41. — Rapporteur en grades.

66. 1° Mesure d'un angle. — On place le rapporteur de façon que son centre soit au sommet de l'angle, un de ses bords passant par un côté de l'angle : en regard du deuxième côté, le rapporteur indique la mesure de l'angle.

67. 2° Mesure d'un arc de cercle. — On joint les extrémités A et B au centre et on mesure l'angle AOB comme il vient d'être dit.

68. Changement d'unités. — Pour évaluer des degrés en grades ou des grades en degrés, on fait une règle de trois (90° valent 100gr). On arrivera plus rapidement au résultat en utilisant la table de conversion, page 162.

Exercices.

69. — Le cadran d'une montre est partagé en 60 divisions, qui correspondent (pour la grande aiguille) à *une minute de temps* (60e partie de l'heure). Évaluer en degrés et en minutes d'arc l'arc du cadran qui correspond à une demi-heure, à un quart d'heure, à 25 minutes-temps.

70. — Autour d'un point O sont formés 4 angles consécutifs qui couvrent exactement tout le plan; le 2e est double du 1er; le 3e est égal à la somme des deux premiers; le 4e est double du 2e. Donner, en grades, la valeur de chacun.

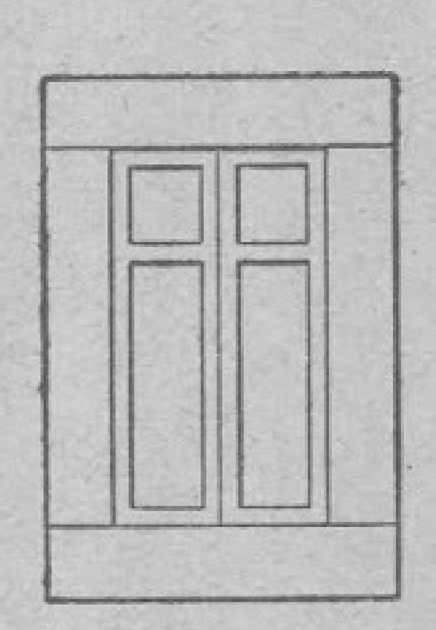


Fig. 42.

§ 9. PERPENDICULAIRES

71. Équerre. — C'est une plaque mince (de bois ou d'ébonite) qui présente un angle droit.

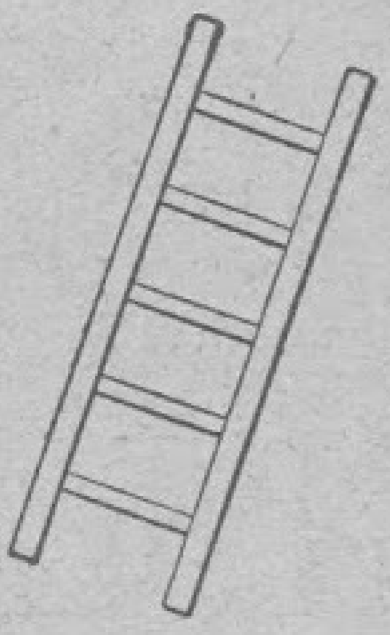


Fig. 42.

Vérification de l'équerre. — On construit le double de son angle droit, qui doit être un angle plat.

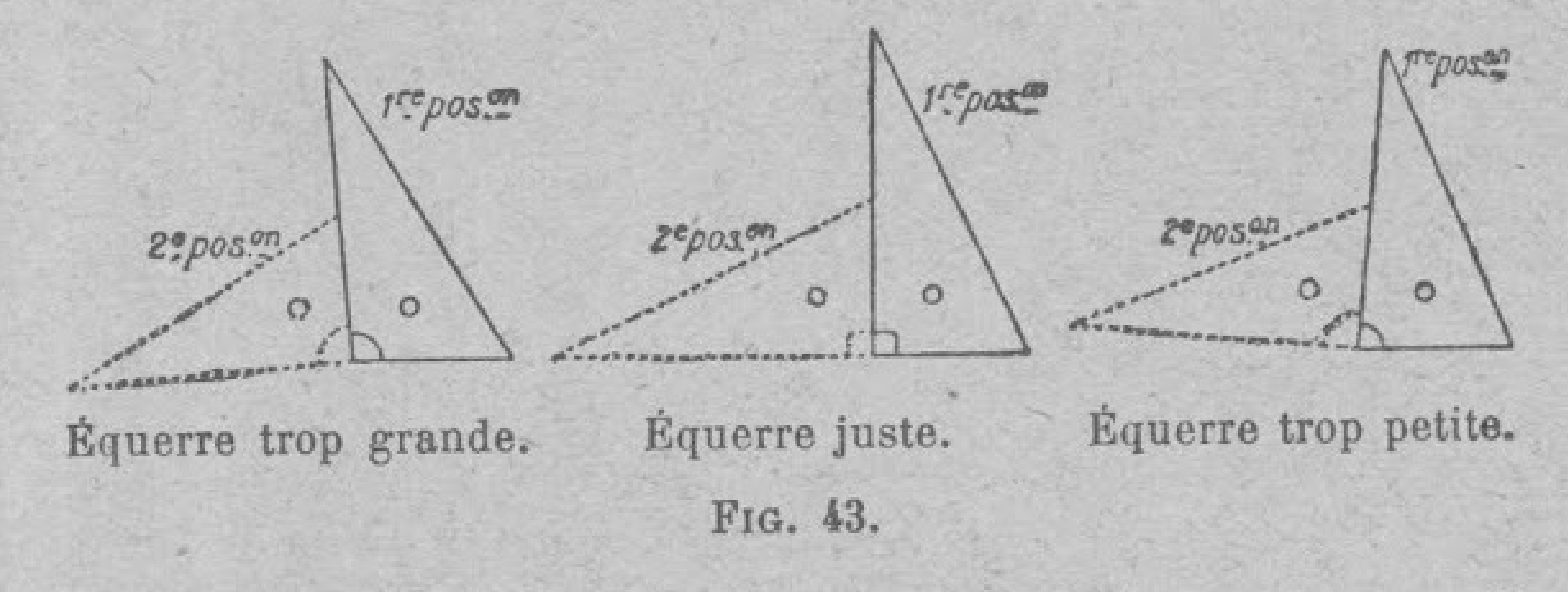


Fig. 43.

72. Application. — Construction d'une équerre au moyen d'une feuille de papier pliée en quatre. (Conséquence de la définition de l'angle droit.)

73. Définition. — *On dit que deux droites* AB, CD *sont* **perpendiculaires** *l'une sur l'autre quand l'un des quatre angles qu'elles forment est droit.*

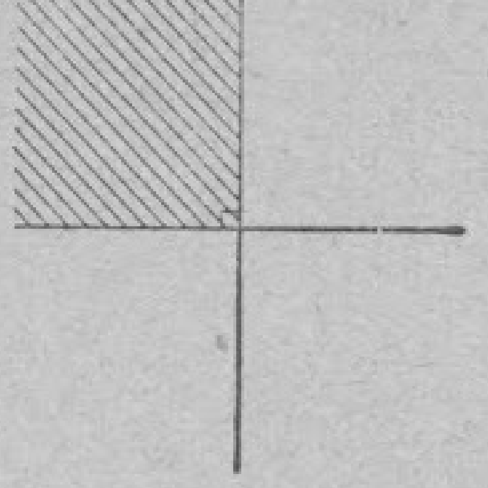
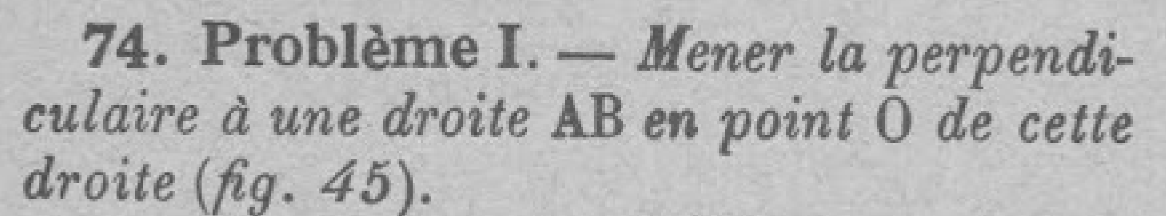


Fig. 44.

D'après la définition de l'angle droit, les trois autres le sont aussi.

Si on déplie la feuille de papier de l'application précédente, les plis forment deux droites perpendiculaires.



74. Problème I. — *Mener la perpendiculaire à une droite* **AB** *en point* O *de cette droite* (*fig. 45*).

On réalise un angle plat $\widehat{CID}$ divisé en deux parties égales par une demi-droite IM (sur une feuille de papier calque); on fait coïncider la droite CD avec la droite AB de façon que le sommet I vienne au point O : la droite I'M' fournit la perpendiculaire cherchée.

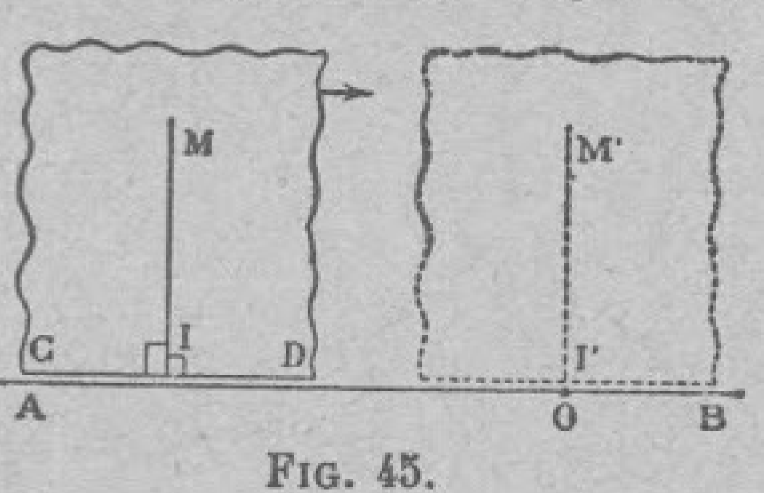


Fig. 45.

75. Problème II. — *Mener la perpendiculaire à une droite par un point* O *non situé sur cette droite* (*fig. 46*).

On fait glisser le papier calque dont on vient de se servir de manière que CD glisse sur AB jusqu'à ce que la demi-droite IM passe par O : la droite IM fournit la perpendiculaire cherchée.

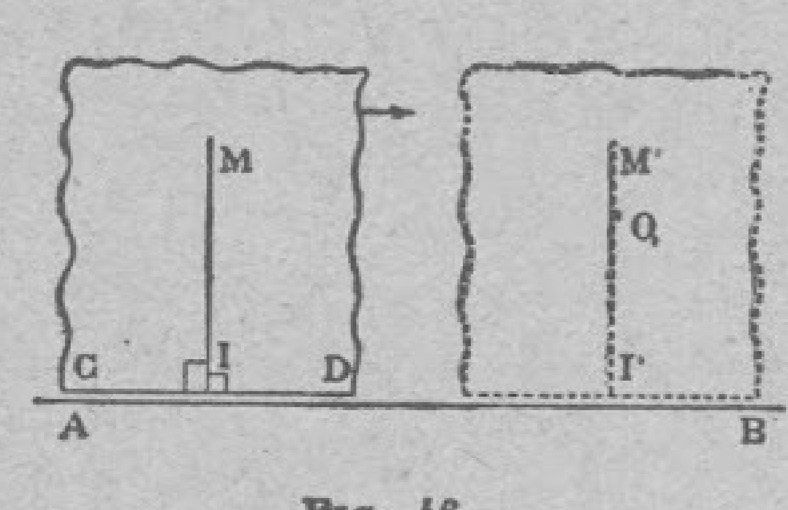


Fig. 46.

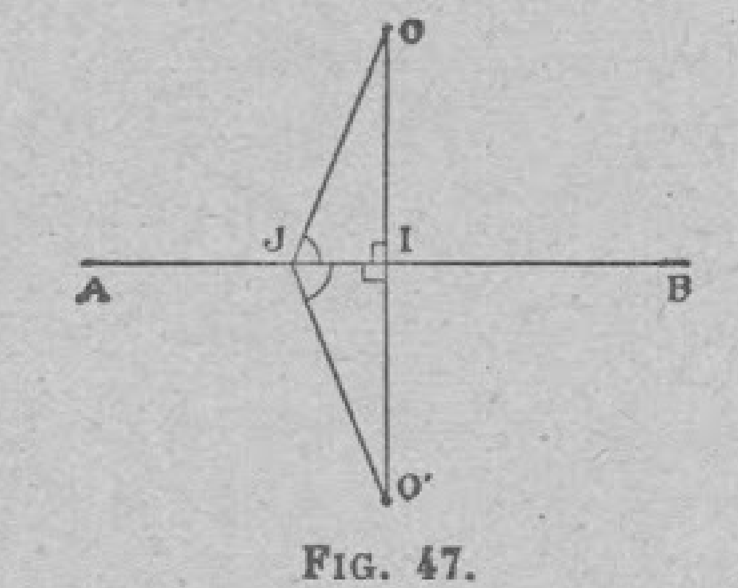


Fig. 47.

Cette perpendiculaire est unique. — En effet supposons qu'il y en ait deux, OI et OJ (fig. 47); retournons la figure OIJ autour de AB, dans la position O'IJ ; les deux angles adjacents en I sont droits, donc O, I, O' sont en ligne droite; de même pour O, J, O'. Or entre O et O' **on ne peut tracer qu'une seule droite : OI et OJ sont donc confondues.**

76. Remarque. — Pratiquement, on remplace le papier calque par une équerre, dont un des côtés glisse sur une règle placée le long de AB. Les problèmes précédents conduisent au théorème suivant :

77. Théorème. — *Par un point quelconque O, il passe une perpendiculaire à une droite et une seule.*

Exercices de pliage.

78. — *Perpendiculaire à une droite AB en un point O de cette droite.*
On plie de manière à appliquer OA sur OB; le pli CD est la perpendiculaire cherchée. Particulièrement commode et rapide quand AB est le bord de la feuille.

79. — *Perpendiculaire à une droite par un point extérieur.*
On plie autour de AB et on marque (trou d'épingle) l'endroit O' où vient le point O; on déplie; OO' est la perpendiculaire cherchée.

80. — *Perpendiculaire au milieu d'un segment AB.*
On plie de manière à faire coïncider A et B (regarder par transparence ou percer le papier); le pli est la perpendiculaire cherchée. Particulièrement commode et rapide pour avoir le milieu de AB, quand AB est le bord de la feuille.

81. Distance d'un point à une droite. — C'est la longueur de la perpendiculaire OI menée du point à la droite; nous verrons plus loin que c'est le plus court chemin pour aller du point à la droite.

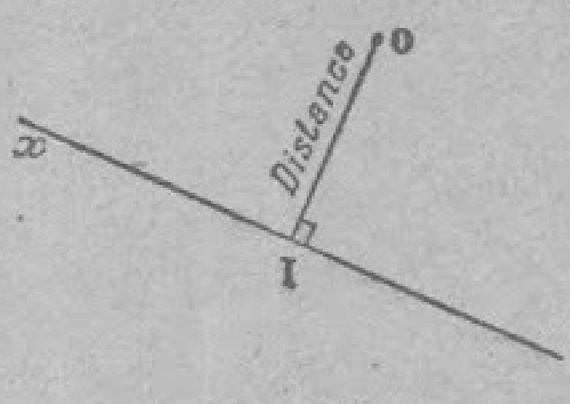


Fig. 48.

Exercices. — 82. Mener par un point la perpendiculaire à une droite; mesurer la distance d'un point à une droite.

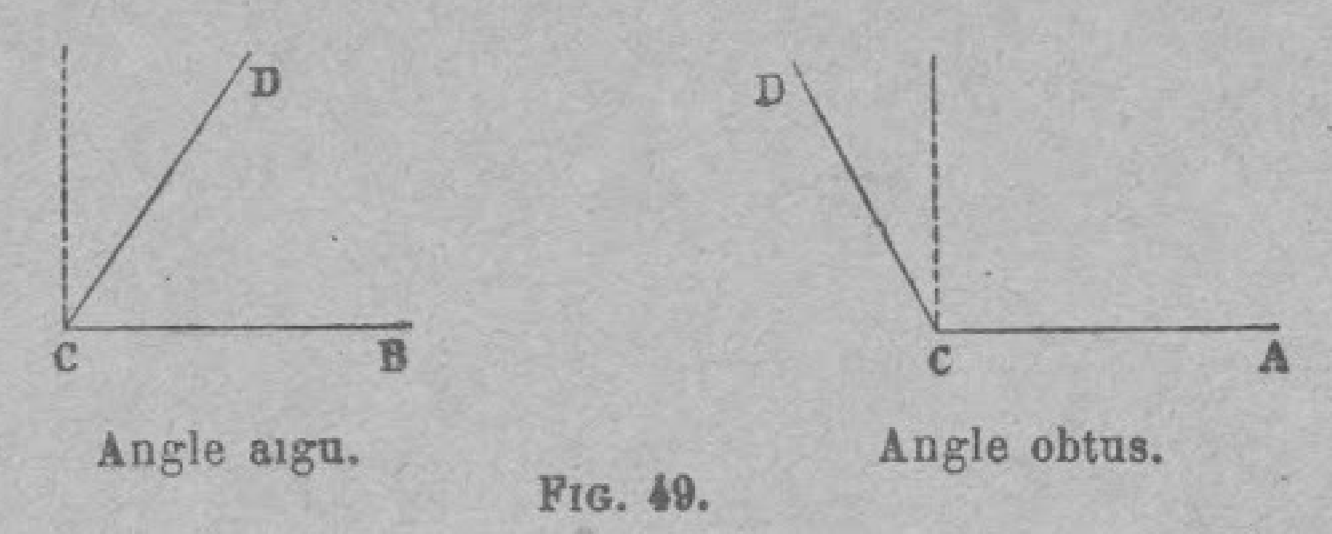
83. — Tracer une droite sur laquelle on marquera 2 points A et B, distants de 84^{mm}. Mener en A et B les perpendiculaires à la droite AB et porter sur ces perpendiculaire (*d'un même côté de* AB) les segments $AC = 72^{mm}$ et $BD = 38^{mm}$. Tracer la droite CD. Par le milieu I de CD mener la perpendiculaire à AB; elle rencontre AB en un point K. Mesurer IK, KA, KB. Vérifier que : 1° $KA = KB$; 2° $IK = \frac{AC + BD}{2}$.

84. — Même exercice que le précédent, les segments AC et BD étant de *part et d'autre* de AB; vérifier que : 1° $KA = KB$; 2° $IK = \frac{AC - BD}{2}$.

§ 10. — DIVERSES CATÉGORIES D'ANGLE

85. — On appelle **angle aigu** un angle inférieur à un angle droit. On appelle **angle obtus** un angle supérieur à un angle droit.

On dit que deux angles sont **complémentaires** quand ils ont



Angle aigu. Angle obtus.
Fig. 49.

pour somme *un angle droit* (total de leurs mesures : 100^{gr} ou $90°$).

On dit que deux angles sont **supplémentaires** quand ils ont pour somme *un angle plat* (total de leurs mesures : 200^{gr} ou $180°$).

86. Conséquences. — *Si deux angles adjacents sont :*

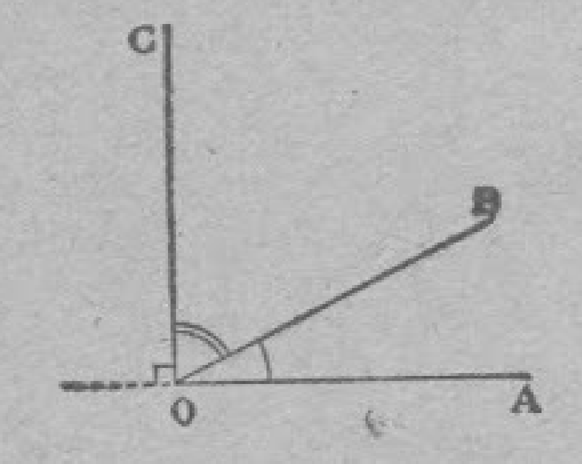


Fig. 50. — Angles adjacents complémentaires.

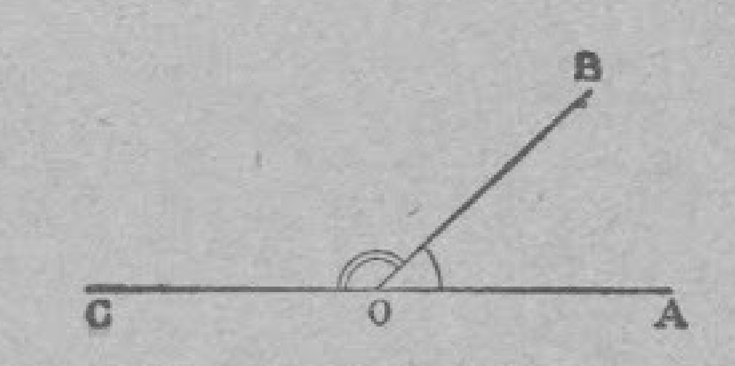


Fig. 51. — Angles adjacents supplémentaires.

complémentaires, *ils ont leurs côtés extrêmes perpendiculaires;*
supplémentaires, *ils ont leurs côtés extrêmes en ligne droite; et réciproquement.*

(Énoncer chaque réciproque.)

Exercices. — **87.** — Construire le complément d'un angle donné.
Construire le supplément d'un angle donné.

88. — Calculer le complément de l'angle de $53^{gr},267$.
le supplément de l'angle de $172^{gr},341$.

89. — Trouver, en grades, un angle qui soit égal

aux $\frac{2}{5}$ de son complément;

aux $\frac{3}{7}$ de son supplément.

90. Angles opposés par le sommet. — On dit que deux angles

sont opposés par le sommet quand les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.

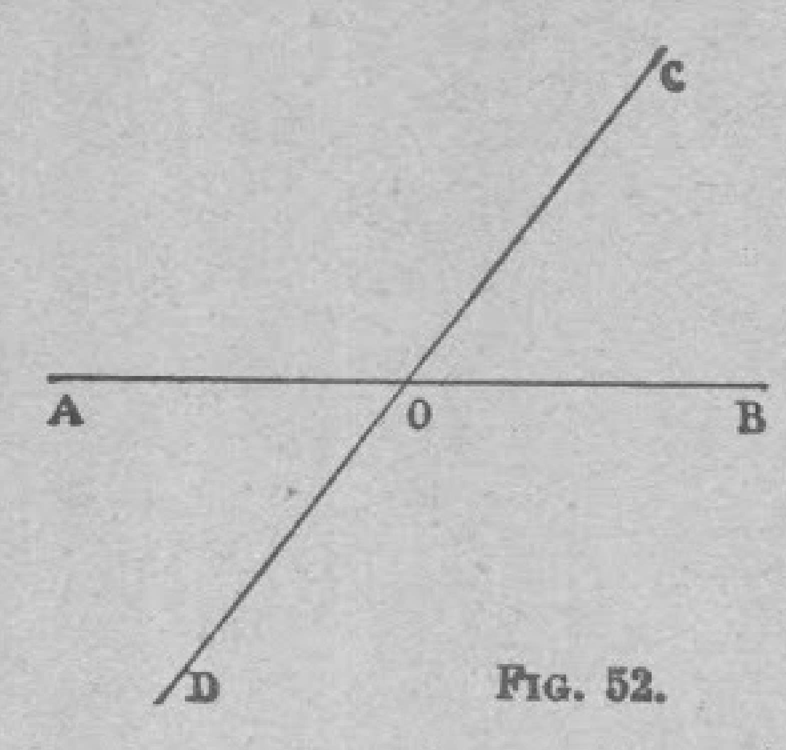
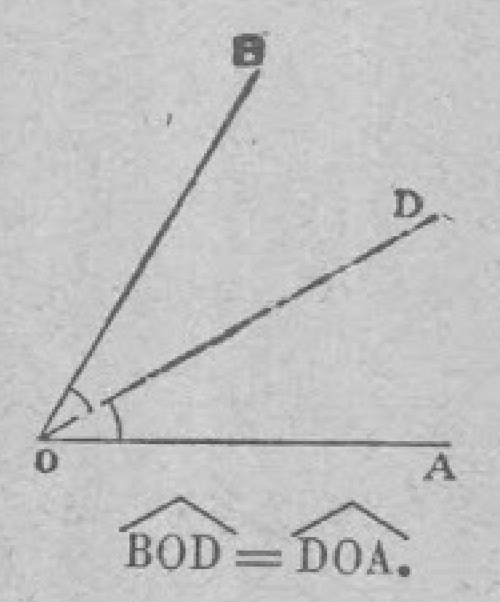


FIG. 52.

91. **Théorème.** — *Si deux angles sont opposés par le sommet, ils sont égaux.* En effet les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ sont chacun le supplément du même angle BOC; autrement dit, on obtient tous deux en retranchant l'angle BOC d'un angle plat; donc ils sont égaux.

§ 11. — BISSECTRICES



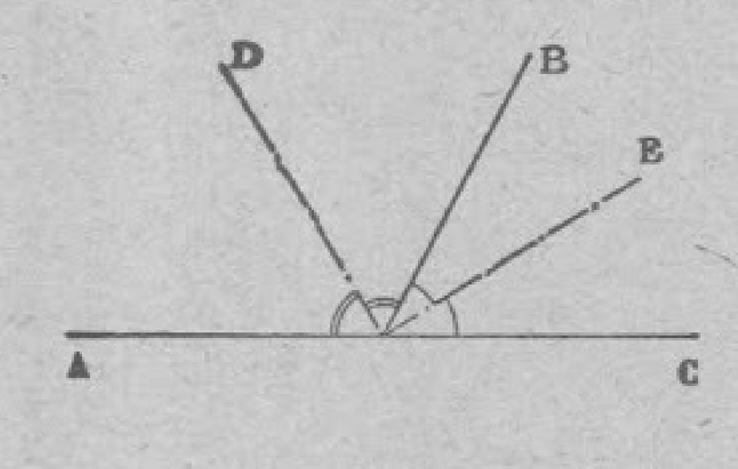
$\widehat{BOD} = \widehat{DOA}$.

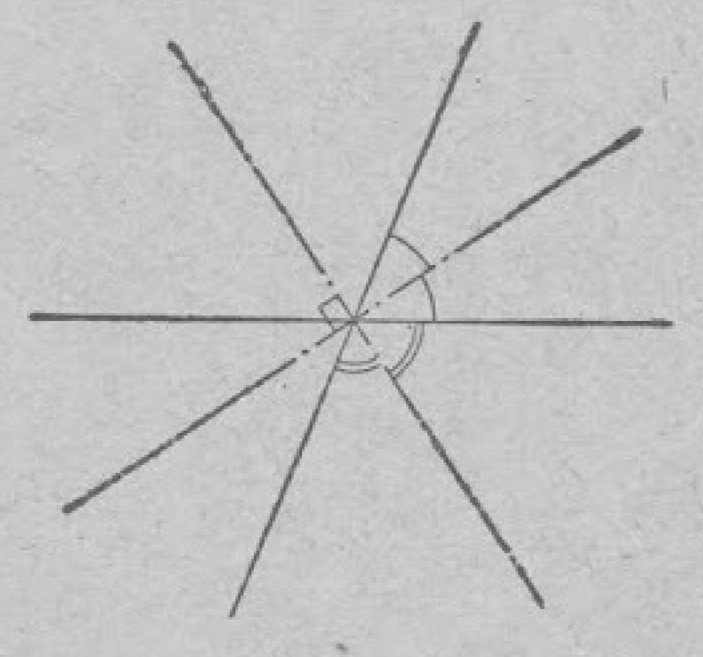
FIG. 53. — Bissectrice.

92. — On appelle **bissectrice** d'un angle la demi-droite issue du sommet, qui partage l'angle en deux angles égaux.

En pliant un angle tracé sur le papier de manière à appliquer ses côtés l'un sur l'autre, la bissectrice est **marquée** par le pli.

93. **Théorème.** — *Si deux angles adjacents sont supplémentaires, leurs bissectrices forment un angle droit*





FIG. 54.

94. **Théorème.** — *Les quatre demi-droites, bissectrices des quatre angles formés par deux droites illimitées, constituent deux droites perpendiculaires.*

Étudier les angles formés par les bissectrices consécutives.

Exercices et manipulations.

95. Pliage. — AB étant le bord rectiligne d'une feuille de papier (fig. 55), tracer une droite quelconque OC, plier de façon à amener OA sur OC et OB sur OC; soient OI et OK les plis. Vérifier que l'angle IOK est droit. Expliquer pourquoi.

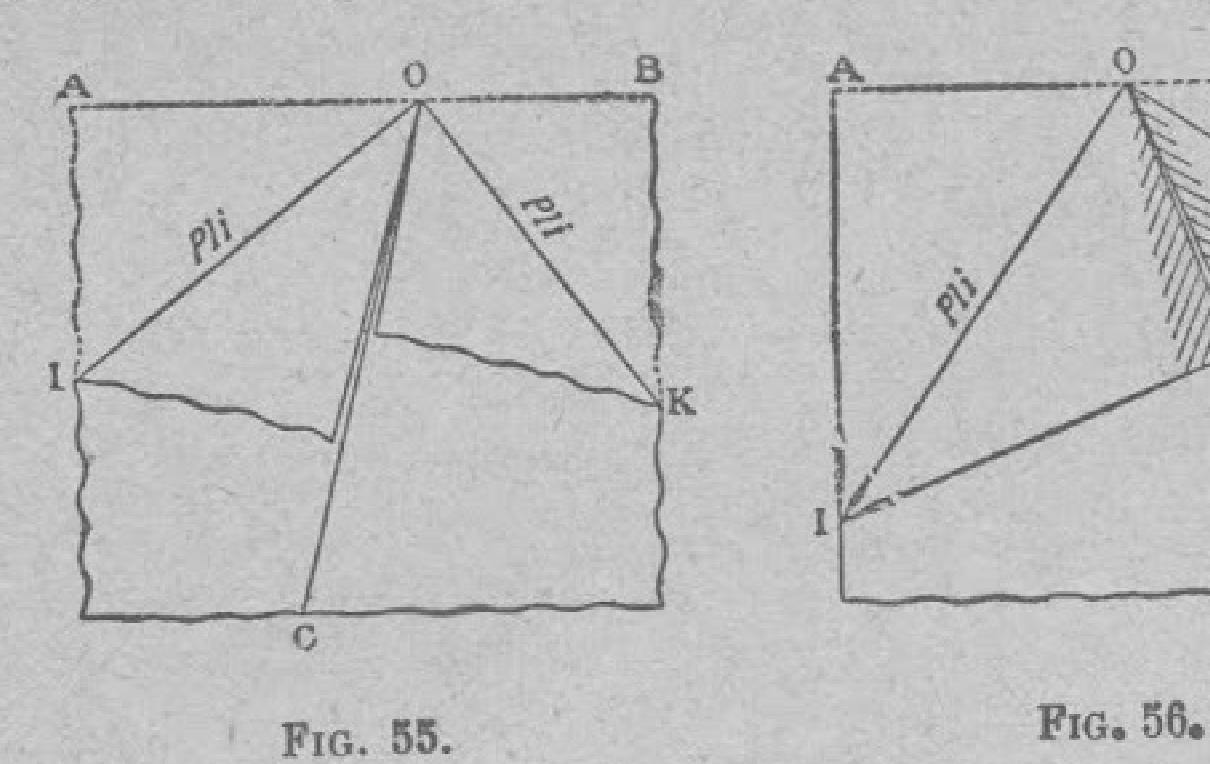


FIG. 55. FIG. 56.

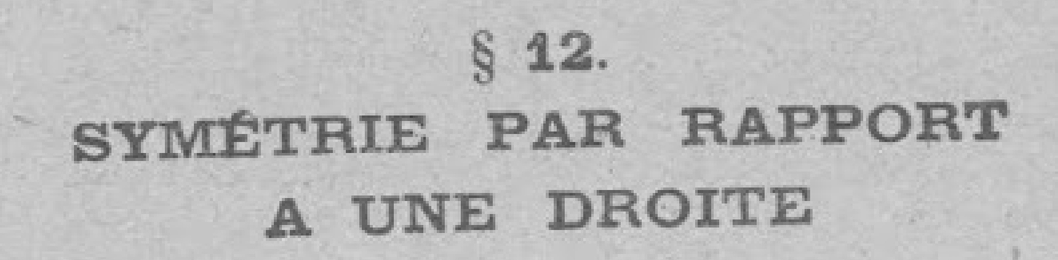
96. Pliage. — Une feuille de papier étant bien coupée à angles droits en A et B (fig. 56), marquer le milieu O de AB et plier de façon à rapprocher OA et OB. Vérifier : 1° que les deux coins de la feuille viennent coïncider en D; 2° que D, I, K sont en ligne droite. Pourquoi?

97. — Deux angles adjacents valent 58^{gr} et 46^{gr}; on trace leurs bissectrices. Quel angle forment-elles?

98. — Deux angles adjacents ont une somme de 126^{gr}. Quel est l'angle formé par leurs bissectrices?

99. — Quel est l'angle formé par les bissectrices de deux angles adjacents complémentaires?

100. — Les bissectrices de deux angles adjacents forment un angle de 58^{gr}. L'un des angles est 49^{gr}. Quel est l'autre?



§ 12. SYMÉTRIE PAR RAPPORT A UNE DROITE

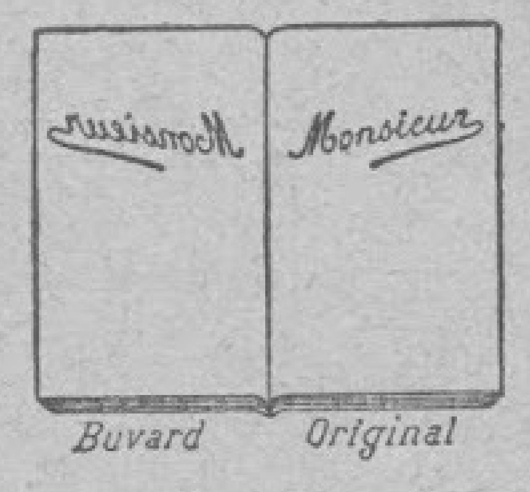


FIG. 57.

101. — Traçons une droite xy, puis diverses figures : un point A, une droite D, une courbe C, un cercle de centre O; calquons-les et reproduisons-les après avoir retourné le calque autour de xy, mais

en l'empêchant de glisser : on obtient le point A′, la droite D′, la courbe

Fig. 58.

C′, un cercle de centre O′. On dit que ces figures sont **symétriques** des premières par rapport à xy. On est ainsi amené à l'énoncé suivant :

Définition. — *On dit que deux figures sont* symétriques *par rapport à une droite xy lorsque, pliant le plan autour de xy, elles viennent s'appliquer exactement l'une sur l'autre.*

La droite xy s'appelle **axe de symétrie des deux figures.**

102. Conséquences. — I. *Si deux figures sont symétriques par rapport à un axe, elles sont égales.*

II. *Si deux points* A, A′ *sont symétriques par rapport à xy, la droite xy est perpendiculaire au milieu du segment* AA′.

Pour avoir le symétrique d'un point A par rapport à xy, on mène de A la perpendiculaire sur xy (équerre) et on la prolonge d'une longueur égale.

Exercices et manipulations.

Constructions (*On mènera les perpendiculaires avec l'équerre*).

103. — Tracer un triangle et construire son symétrique par rapport à une droite qui ne le coupe pas; recommencer avec un autre triangle et une droite issue d'un sommet et ne traversant pas le triangle; puis avec un triangle et une droite issue du sommet et traversant le triangle; enfin avec un triangle et une droite coupant deux côtés. Que remarque-t-on sur les orientations de deux triangles symétriques? Sur les points de rencontre des côtés symétriques (prolongés au besoin)?

104. — Tracer une droite xy et un cercle de 40^{mm} de rayon, dont le centre soit à 55^{mm} de la droite. Construire le symétrique du cercle par rapport à xy.

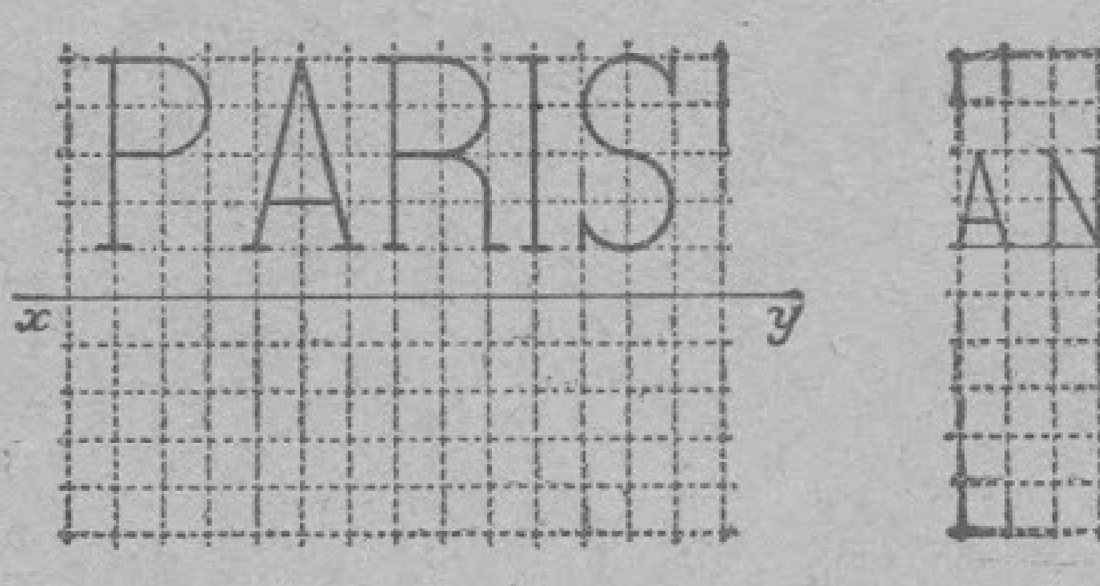
Recommencer avec un cercle de 40^{mm} de rayon, dont le centre soit à 28^{mm} de la droite. Que remarque-t-on?

Emploi du papier calque.

105. — Construire la figure symétrique d'un dessin au choix.

Emploi du papier quadrillé.

106. — Construire les symétriques des mots ci-dessous par rapport à l'axe xy.



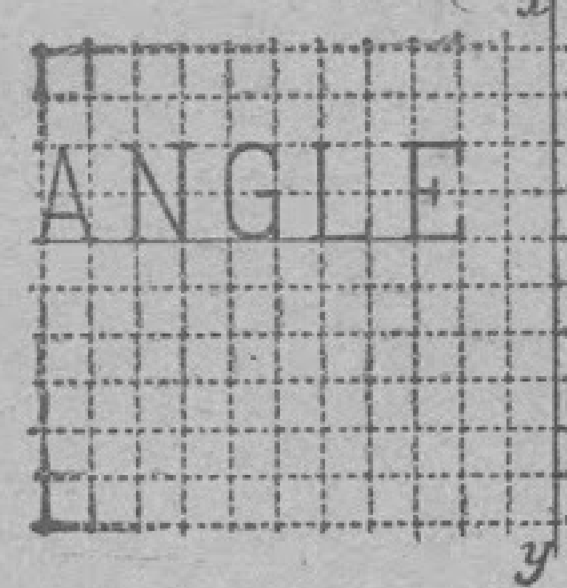


Fig. 59.

107. — Écrire son nom en lettres majuscules et prendre le symétrique de la figure obtenue, par rapport à une droite.

Figures possédant un axe de symétrie.

108. — Considérons les deux figures 60 et 61. Chacune est partagée par un axe xy en deux parties qui coïncident l'une avec

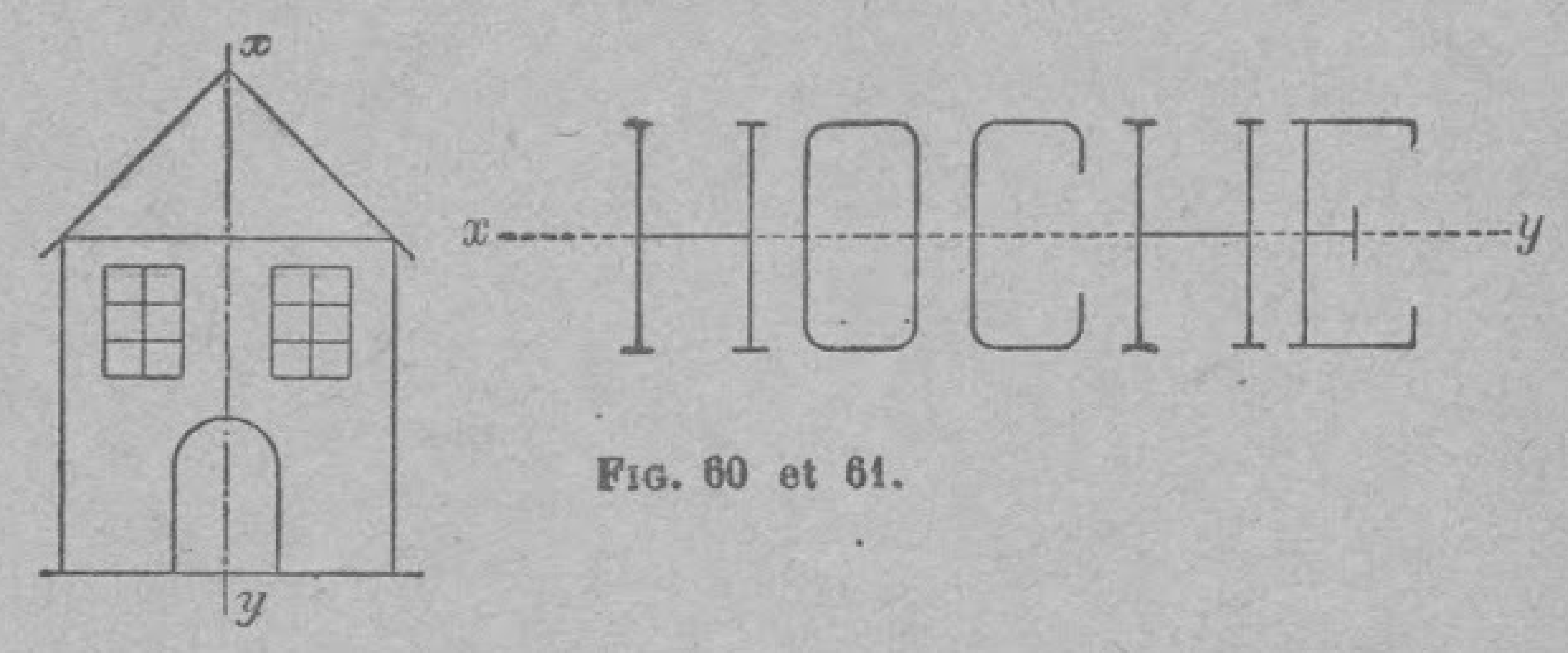


Fig. 60 et 61.

l'autre par pliage autour de xy. On exprime ce fait en disant que chacune de ces figures possède un axe de symétrie xy. D'une manière générale :

Définition. — *On dit qu'une figure possède un axe de symétrie xy lorsqu'elle est partagée par cet axe en deux parties qui sont symétriques l'une de l'autre par rapport à xy, c'est-à-dire qui coïncident l'une avec l'autre par pliage autour de xy.*

109. Exemples. — Un segment est symétrique par rapport à la perpendiculaire en son milieu (*médiatrice du segment*).

Un angle est symétrique par rapport à sa bissectrice.
Un cercle est symétrique par rapport à un diamètre.

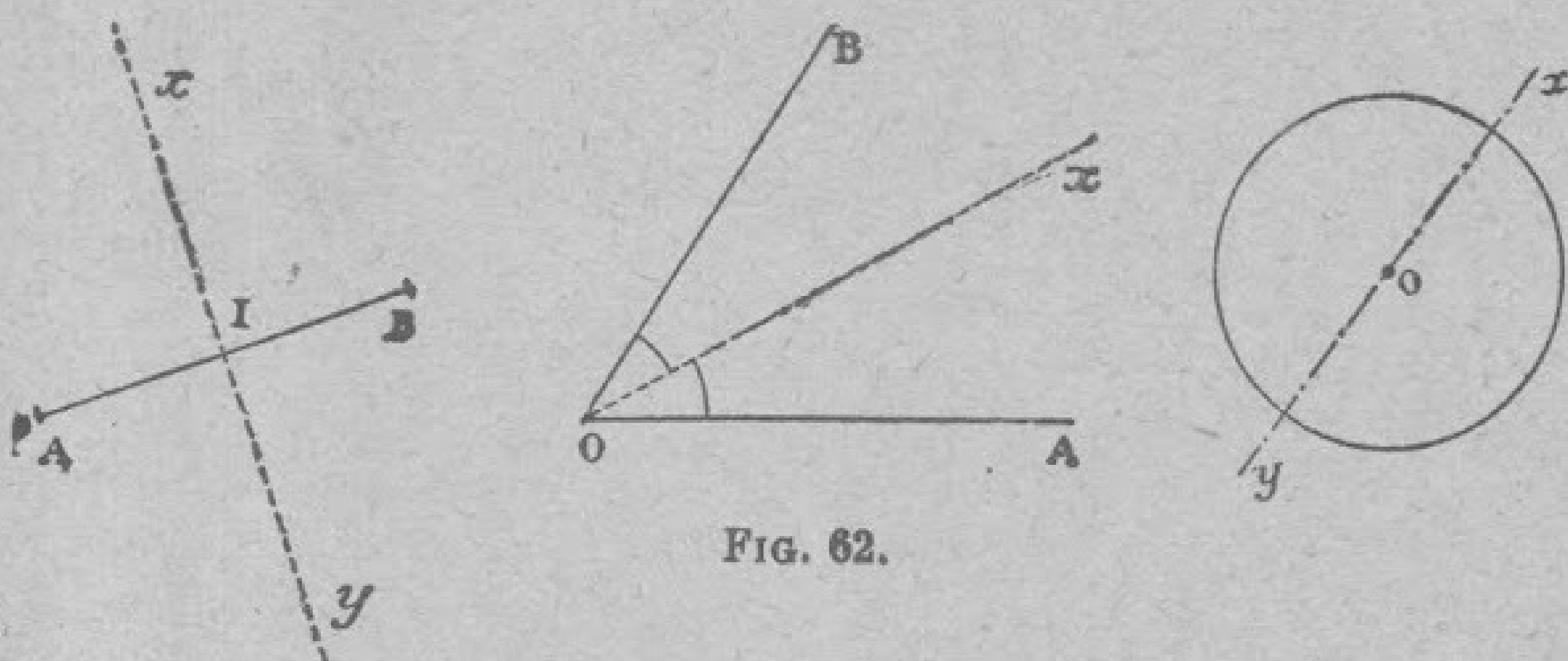


Fig. 62.

Exercices et manipulations.

110. Exemple de figure à axe de symétrie : La tache symétrique (pliage et écrasement).

111. Emploi du papier quadrillé. — Énumérer et dessiner les lettres de l'alphabet qui ont un axe de symétrie.

112. — Quelles sont les lettres majuscules qui ont deux axes de symétrie?

113. Emploi du papier calque. — Vérifier les remarques suivantes :

1° Une figure qui possède un axe de symétrie peut toujours coïncider par glissement avec l'une de ses symétriques (Exemple : le mot HOCHE de la figure 61).

2° Une figure qui n'a pas d'axe de symétrie ne peut pas coïncider par glissement avec l'une de ses symétriques. (Prendre par exemple une lettre R, une lettre L, une lettre N, ; calquer la figure, construire sa symétrique avec le calque retourné, et chercher ensuite à faire coïncider la figure symétrique avec le calque remis à l'endroit.)

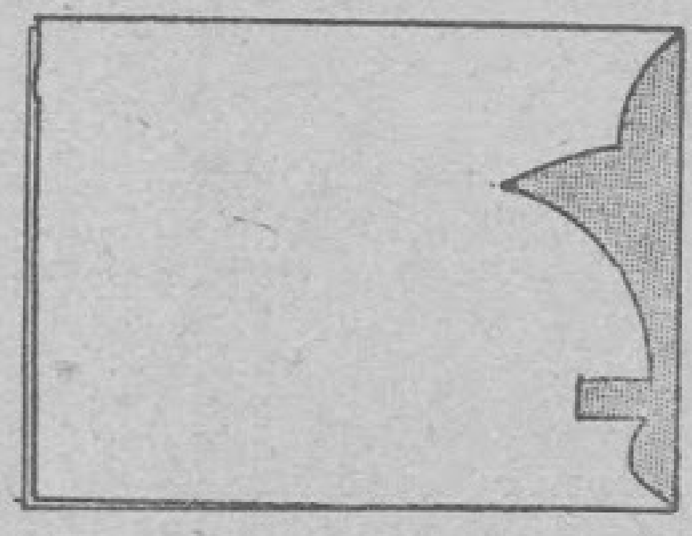
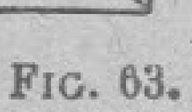
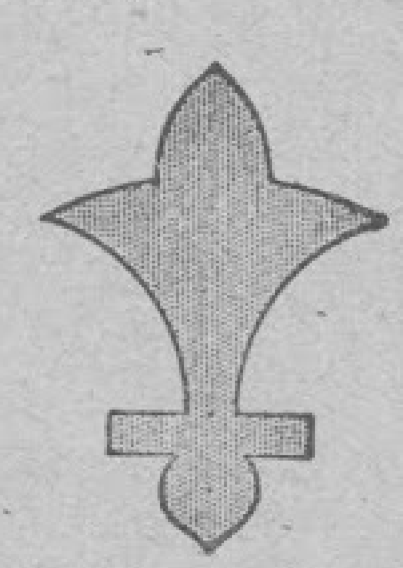




Fig. 63.

114. Découpage. — Comment découper une figure possédant un axe de symétrie. (Plier et dessiner une moitié de la figure.)

CHAPITRE II

LE TRIANGLE

§ 1. — DÉFINITIONS

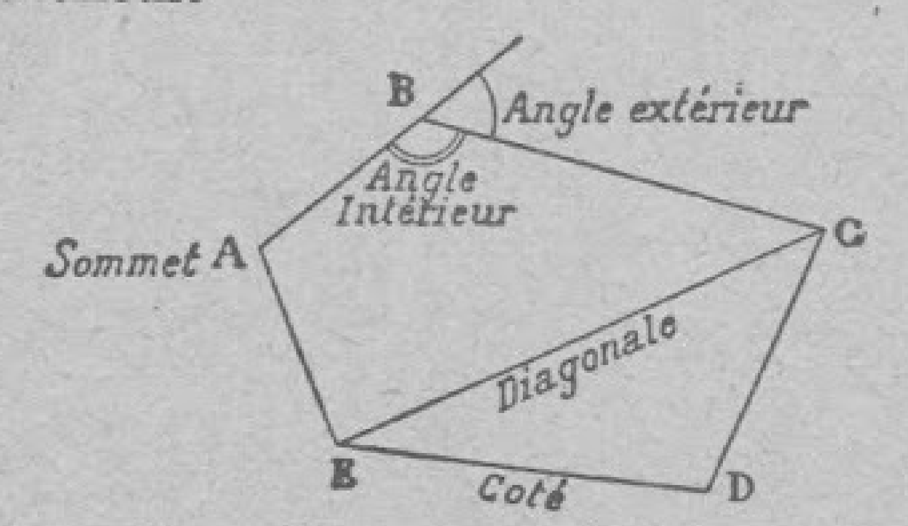
I. Polygones.

115. — On appelle **polygone** une ligne brisée fermée. Les divers segments sont les **côtés** du polygone; leurs extrémités sont les **sommets.**

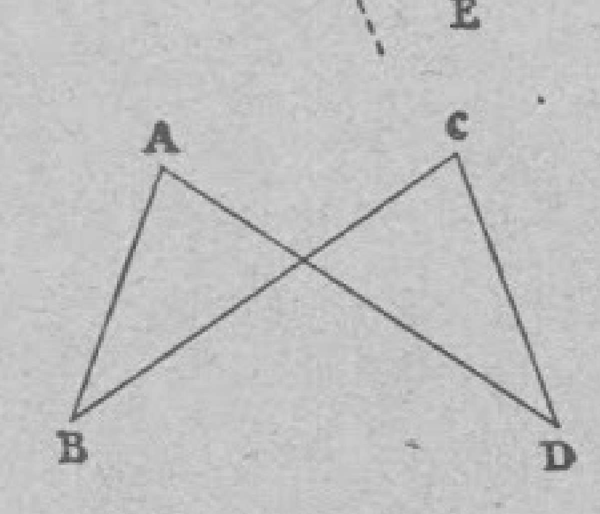
On appelle **diagonale** la droite qui joint deux sommets non consécutifs.

On dit qu'un polygone est **convexe** quand aucun de ses côtés, prolongé indéfiniment, ne le coupe.

Dans un polygone convexe, l'angle saillant de deux côtés consécutifs s'appelle **angle intérieur**; l'angle adjacent supplémentaire s'appelle **angle extérieur.**



Polygone convexe.



Polygones concaves.

Fig. 64.

Un polygone non convexe est appelé **concave.**

On appelle : **triangle,** un polygone à 3 côtés (toujours convexe).

quadrilatère,	un polygone à 4 côtés		peuvent être
pentagone	— 5 —		convexes
hexagone	— 6 —		ou concaves.

II. Triangles.

116. On appelle :

triangle isocèle, un triangle qui a deux côtés égaux (le troisième côté s'appelle **base**);

triangle équilatéral, un triangle dont les trois côtés sont égaux;

triangle rectangle, un triangle qui a un angle droit; le côté opposé s'appelle **hypoténuse**.

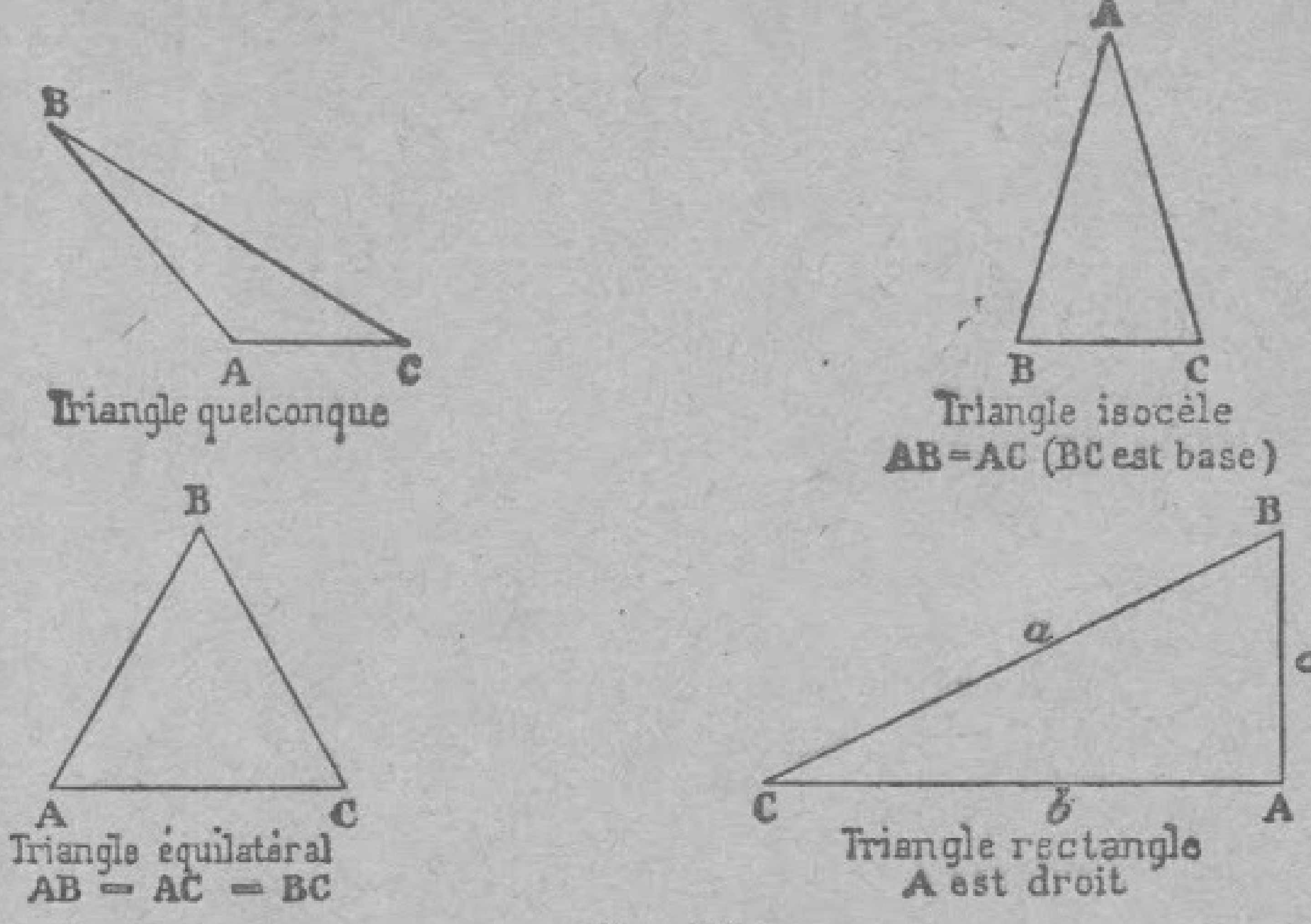


Fig. 65.

Hauteur. — On appelle *hauteur* d'un triangle la perpendiculaire menée d'un sommet au côté opposé.

Un triangle a trois hauteurs; nous verrons plus tard qu'elles passent par un même point (on dit aussi : sont *concourantes*).

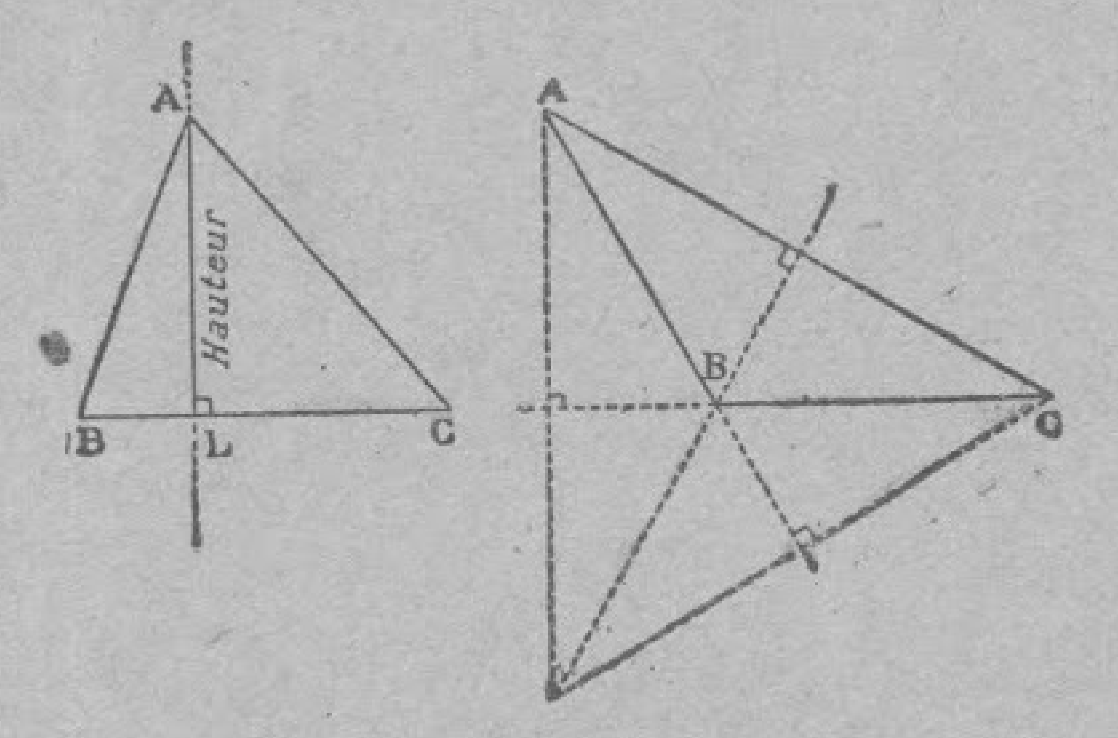


Fig. 66. — Hauteurs.

Médiane. — On appelle *médiane* d'un triangle la droite qui joint un sommet au milieu du côté opposé.

Un triangle a trois médianes. On démontre qu'elles passent par un

BD = DC, CE = EA, AF = FB.

$AG = \frac{2}{3}AD$, $BG = \frac{2}{3}BE$, $CG = \frac{2}{3}CF$.

Fig. 67.

même point situé aux deux tiers de chacune d'elles à partir du sommet.

Médiatrice. — On appelle *médiatrice* d'un triangle la médiatrice de l'un de ses côtés (perpendiculaire menée au côté en son milieu).

Un triangle a trois médiatrices; nous verrons plus tard qu'elles passent par un même point.

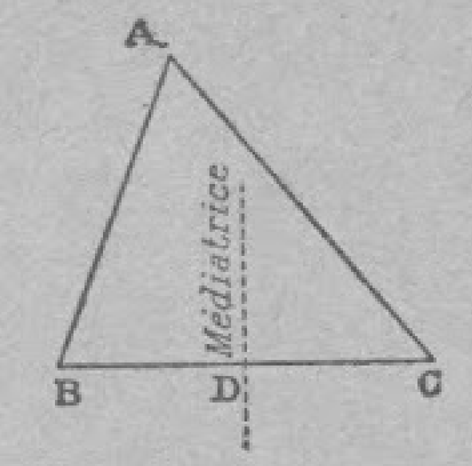


Fig. 68.

Bissectrice. — On appelle *bissectrice* d'un triangle la bissectrice de l'un de ses angles.

Un triangle a six bissectrices : trois intérieures et trois extérieures

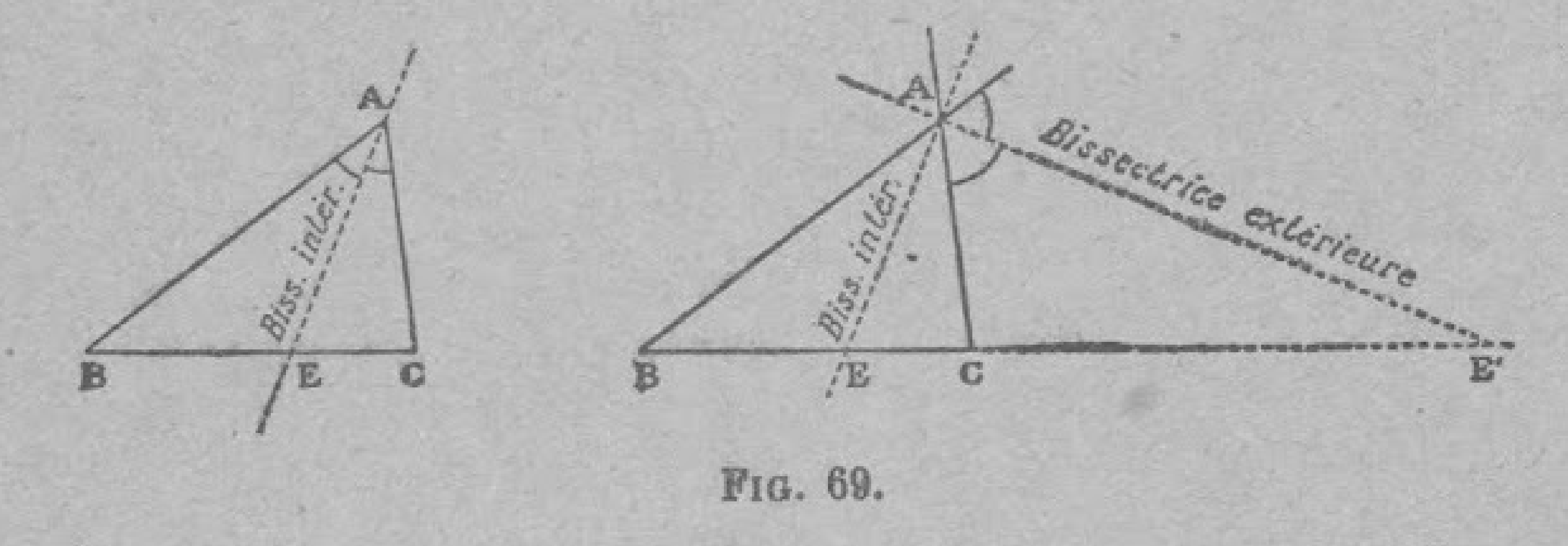


Fig. 69.

Nous verrons plus loin que les trois bissectrices intérieures passent par un même point.

Exercices et manipulations.

Pliage. — **117.** Découper un triangle en papier et déterminer par pliage une hauteur, une médiatrice, une bissectrice intérieure.

Constructions et vérifications.

118. — Construire un triangle isocèle dont deux côtés ont 55^{mm} et l'angle compris : *a*) 130^{gr}; *b*) 25^{gr}.

119. — Construire un triangle isocèle dont deux côtés ont 65^{mm} et

l'angle compris $\frac{2^D}{3}$ (employer un rapporteur, ou construire au préalable cet angle par pliage). Vérifier que ce triangle est équilatéral.

120. — Construire un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit valent 35^{mm} et 60^{mm}.

121. — Construire un triangle rectangle isocèle, dont les deux côtés égaux valent 55^{mm}.

122. — Tracer un triangle quelconque et vérifier que les hauteurs sont concourantes. Comparer les positions du point de concours obtenues dans les cas suivants :

a) le triangle n'a pas d'angle obtus;
b) le triangle a un angle obtus;
c) le triangle est rectangle.

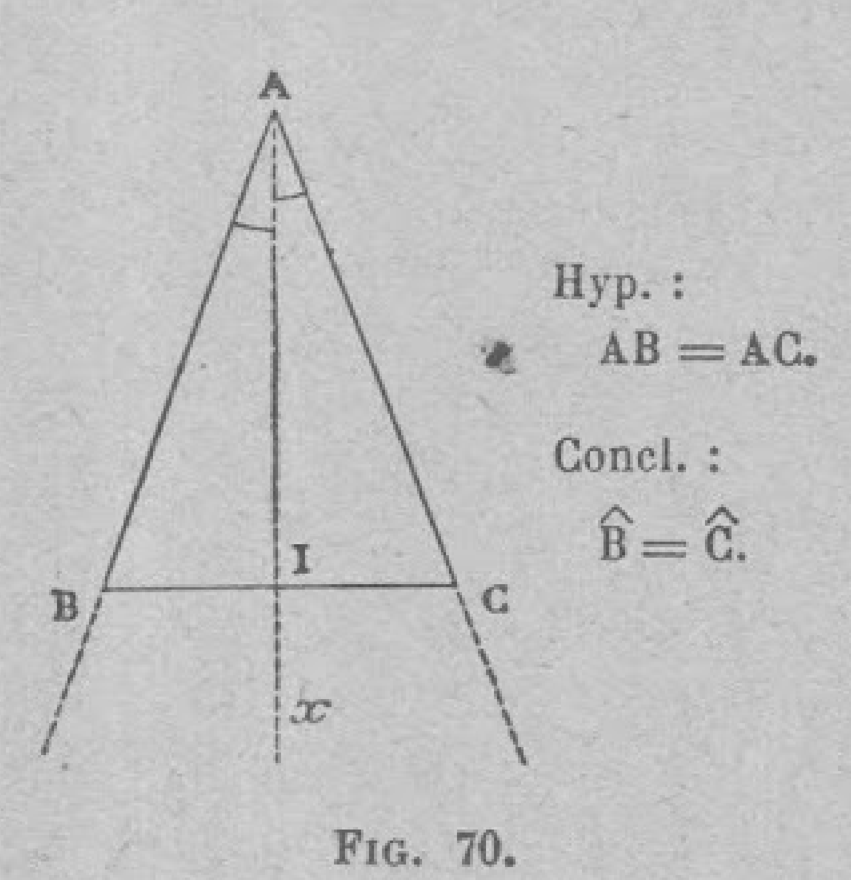
123. — Tracer un triangle quelconque et vérifier que les médiatrices sont concourantes. Tracer le cercle qui a son centre au point de concours et qui passe par un sommet; que constate-t-on?

124. — Tracer un triangle quelconque et ses médianes. Vérifier les propriétés indiquées à la figure 67.

§ 2. — TRIANGLE ISOCÈLE

125. Théorème. — *Si un triangle est isocèle, les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

Soit Ax la bissectrice intérieure de l'angle A, I son point de rencontre avec BC. Elle partage le triangle en deux triangles AIB, AIC situés de part et d'autre de AI. Retournons le triangle AIB autour de AI. L'angle IAB vient s'appliquer sur son égal IAC, la demi-droite AB vient s'appliquer sur la demi-droite AC. Comme AB = AC, le point B tombe en C. Par suite les angles B et C coïncident; ils sont donc égaux.



Hyp. : AB = AC.
Concl. : $\hat{B} = \hat{C}$.

Fig. 70.

126. Conséquences de cette démonstration. — *Dans un triangle isocèle, la bissectrice, la hauteur et la médiane issues du sommet A sont confondues.*

Un triangle isocèle admet un axe de symétrie.

127. Théorème réciproque. — *Si un triangle a deux angles égaux, les côtés opposés sont égaux*, autrement dit, *le triangle est isocèle.*

Faire un calque du triangle, le retourner; amener C′ en B, B′ en C; l'angle C′ coïncide avec l'angle B et l'angle B′ avec l'angle C; les deux triangles coïncident et A′ B′, calque de AB, coïncide avec AC.

Hyp. : $\hat{B} = \hat{C}$.
Concl. : AB = AC.

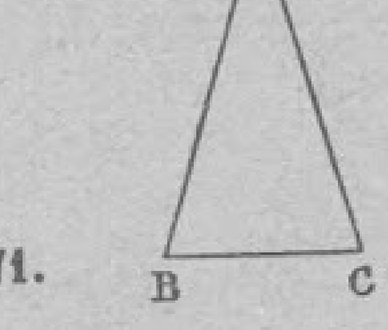




Fig. 71.

128. **Exercice.** — Construire un triangle isocèle ABC connaissant $BC = 60^{mm}$, $\hat{B} = \hat{C} = 60^{gr}$.

129. Application au triangle équilatéral. — *Si un triangle est équilatéral, ses trois angles sont égaux*, et réciproquement :

Si un triangle a ses trois angles égaux, il est équilatéral.

130. Conséquences de la symétrie d'un triangle isocèle. — L'axe de symétrie d'un triangle isocèle le partage en deux triangles rectangles égaux. Inversement, tout triangle rectangle peut être regardé comme une moitié de triangle isocèle. (Le replier autour d'un côté de l'angle droit.)

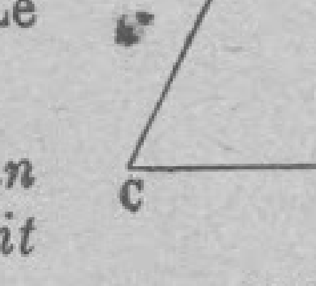


Fig. 72.

131. Conséquence I. — *Les angles d'un triangle rectangle autres que l'angle droit sont aigus.*

En effet l'angle B d'un triangle rectangle est la moitié de l'angle d'un triangle isocèle : cet angle CBC′ est saillant, c'est-à-dire inférieur à deux droits. Sa moitié, $\widehat{ABC}$, est donc inférieure à un angle droit.

132. Conséquence II. — *Les angles à la base d'un triangle isocèle sont aigus.*

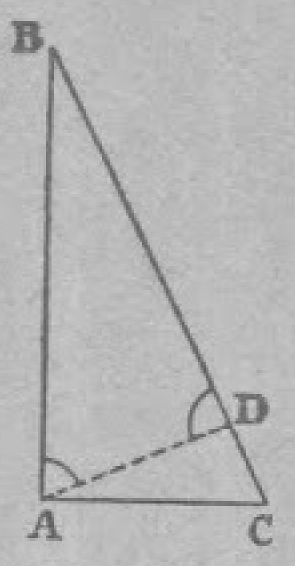


FIG. 73.

133. CONSÉQUENCE III. — *Dans un triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est inférieur à l'hypoténuse.*

Reportons le côté BA sur l'hypoténuse, en BD : il faut montrer que D est entre B et C. Or BDA est isocèle. Donc l'angle $\widehat{BAD}$ est aigu, et par suite AD est à l'intérieur de l'angle droit BAC. D est donc bien entre B et C.

§ 3. — PROPRIÉTÉS DE LA MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

Rappelons qu'on appelle médiatrice d'un segment la perpendiculaire à ce segment en son milieu. C'est un axe de symétrie pour le segment.

134. Théorème. — *Si un point* M *est équidistant de deux points* A *et* B, *il appartient à la médiatrice du segment* AB.

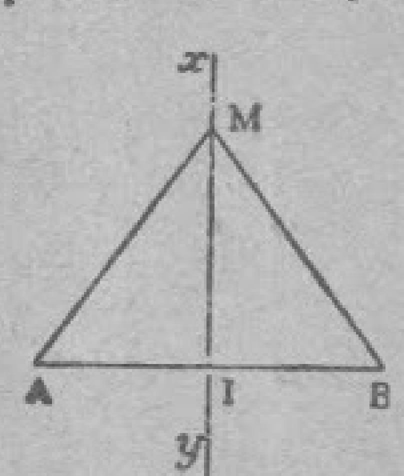


FIG. 74.

En effet, si MA = MB, le triangle MAB est isocèle et la médiane MI (AI = IB) est confondue avec la hauteur.

135. Théorème réciproque. — *Si un point appartient à la médiatrice d'un segment il est équidistant des extrémités du segment.*

En effet, à cause de la symétrie, MA peut venir sur MB et lui est donc égal.

136. REMARQUE. — Le théorème direct montre que la condition, pour le point M, d'être sur la médiatrice, est *nécessairement réalisée* quand le point est équidistant de A et de B; le théorème réciproque montre que cette condition est *suffisante* pour que le point soit équidistant de A et B. Donc :

Résumé. — *Pour qu'un point soit équidistant de deux points donnés* A *et* B, **il faut et il suffit** *qu'il appartienne à la médiatrice du segment* AB.

On peut encore résumer cette double propriété par le schéma suivant :

Si on suppose que

M *est équidistant de* A *et* B	M *est sur la médiatrice du segment* AB.

⟶ (il faut)
⟵ (il suffit).

137. Lieu géométrique. — On peut dire que la médiatrice d'un segment est **l'ensemble** des points qui sont à égale distance des extrémités du segment.

En géométrie un ensemble de ce genre s'appelle un **lieu géométrique.** En d'autres termes, *lieu géométrique* signifie : *ligne formée par* **l'ensemble** *des points qui possèdent une propriété déterminée.*

Ici, cette propriété est « d'être **également distants** de A et B ».

L'expression *lieu géométrique* remplace l'expression « *il faut et il suffit* ». Donc :

Théorème. — *Le lieu géométrique des points qui sont à égale distance des extrémités d'un segment est la médiatrice de ce segment.*

138. Conséquence.

I. Théorème. — *Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes.*

Traçons d'abord les médiatrices de AB et BC; la figure montre qu'elles se coupent, soit O leur point commun.

O étant sur la médiatrice de AB, on a

$$OA = OB \qquad (135).$$

O étant sur la médiatrice de BC, on a

$$OB = OC \qquad (135).$$

Donc OA = OC,

et par suite (134), O est sur la médiatrice de AC.

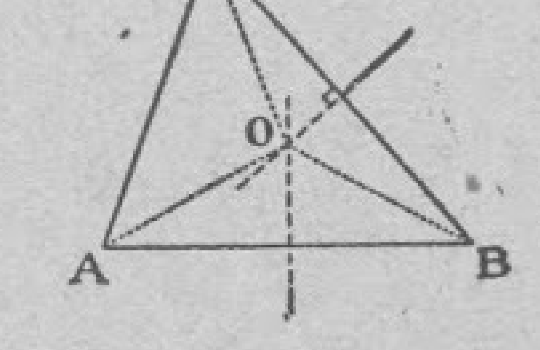


FIG. 75.

II. Théorème. — *Par trois points non en ligne droite, il passe un cercle et un seul.*

Imaginons ce cercle déjà tracé, autrement dit, *supposons le problème résolu.* Soit O le centre : il est équidistant des trois points A, B, C, et inversement, si un point est équidistant des trois points A, B, C, on peut, de ce point comme centre, décrire un cercle passant par les trois points.

Or pour qu'un point soit équidistant de **A et B, il faut et il suffit**

qu'il soit sur la médiatrice de AB ; pour qu'il soit équidistant de B et de C, il faut et il suffit qu'il soit sur la médiatrice de BC.

Le centre cherché est donc à l'intersection de ces deux médiatrices; on voit bien qu'il y en a un et un seul.

Fig. 76.

139. Cercle circonscrit. — *On appelle* **cercle circonscrit** *à un triangle le cercle qui passe par les trois sommets.* Son centre est au point de rencontre des médiatrices du triangle.

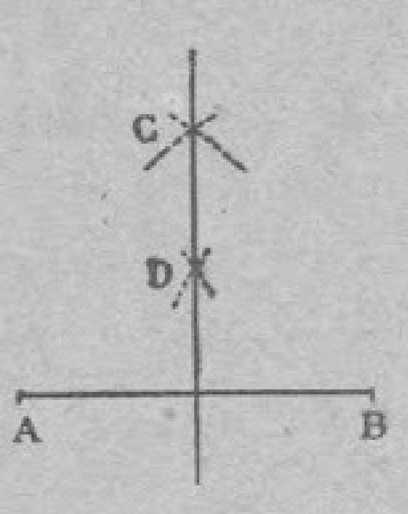
Inversement le triangle est dit : *inscrit dans le cercle.*

Constructions et vérifications.

(Emploi de la règle et du compas, sans équerre.)

140. — Tracer la **médiatrice d'un segment.** Trouver le milieu de deux points.

On cherche deux points équidistants des extrémités du segment.



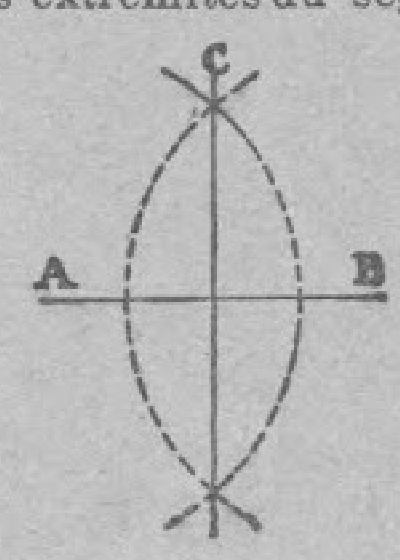


Fig. 77.

141. — Un projet de voie ferrée passe à proximité de deux villages A, B, pour lesquels on ne veut faire qu'une station; où mettre cette station pour qu'elle soit à égale distance des deux villages?

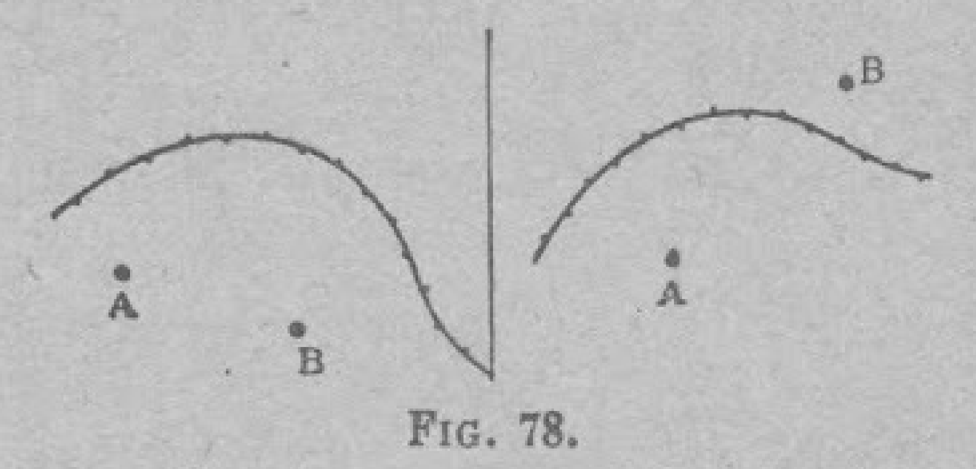


Fig. 78.

142. — Dessiner un triangle n'ayant pas d'angle obtus, puis un triangle ayant un angle obtus. Construire le cercle circonscrit à chacun de ces triangles. Que remarque-t-on sur la position du centre ?

143. Perpendiculaire à une droite en un de ses points A. — On porte sur la droite, à partir du point A, et de part et d'autre, deux segments égaux AB = AC. On achève alors comme précédemment.

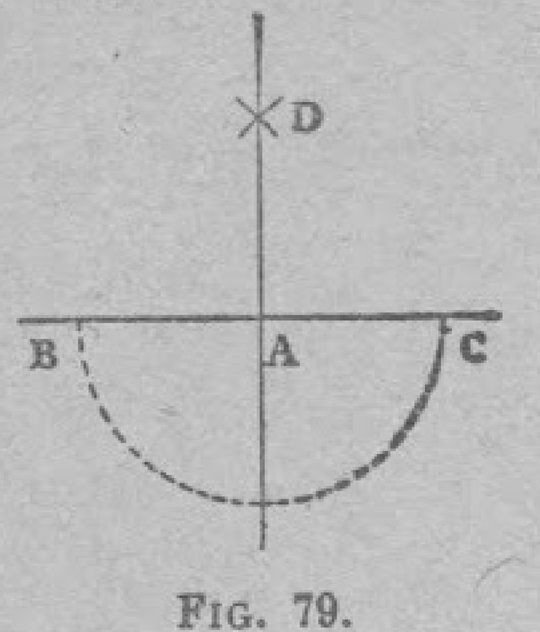


Fig. 79.

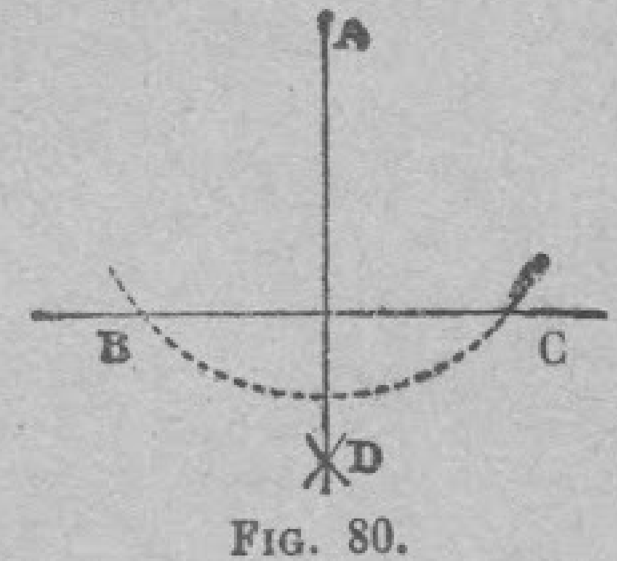


Fig. 80.

144. Perpendiculaire à une droite menée par un point extérieur A. — De A comme centre on décrit un cercle de rayon assez grand pour qu'il coupe la droite en deux points B et C. A est à la même distance de B et C : donc la médiatrice du segment BC passe par A. C'est donc la perpendiculaire cherchée. On achèvera la construction de cette médiatrice.

145. Bissectrice d'un angle. — On porte sur les côtés OA = OB : le triangle AOB est isocèle et la bissectrice cherchée est la médiatrice du segment AB (inutile de tracer le segment AB).

146. — Construire un angle xAy de 70gr. Construire un triangle isocèle ABC ayant pour angle **au sommet** xAy, de manière que la hauteur issue de A vaille 75mm

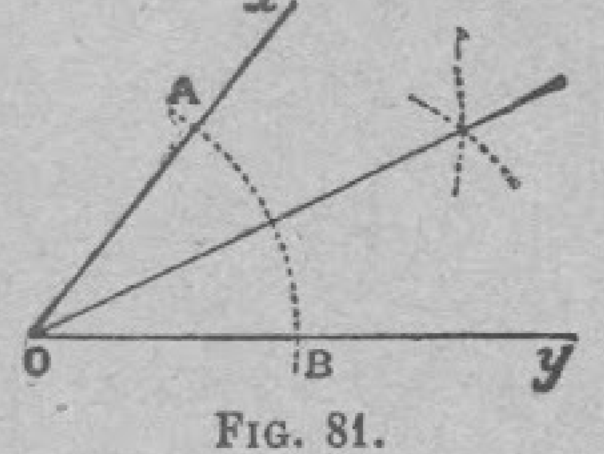


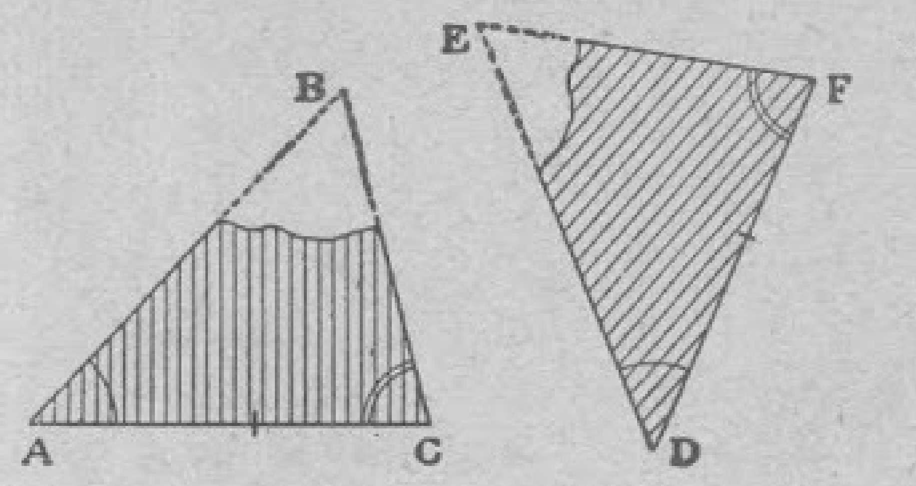
Fig. 81.

§ 4. — CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES QUELCONQUES

147. — Si deux triangles sont égaux, les 3 côtés de l'un sont respectivement égaux aux 3 côtés de l'autre et les 3 angles de l'un sont respectivement égaux aux 3 angles de l'autre. Supposons qu'on ait deux terrains triangulaires présumés égaux, l'un à Paris, l'autre à Lyon; on conçoit que pour vérifier l'égalité de ces deux terrains, on ne sera pas obligé de transporter sur l'un un triangle égal à l'autre, et qu'il suffira d'effectuer certaines mesures sur chacun des terrains, et de comparer les résultats de ces mesures. Les cas d'égalité indiquent des conditions qui **suffisent** pour pouvoir affirmer que deux triangles sont égaux.

148. 1er Cas. — *Si deux triangles ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun, ils sont égaux.*

Transportons le calque du triangle DEF sur le triangle ABC de manière à placer D en A et F en C (possible, puisque AC = DF), E tombant du même côté que B. L'angle D coïncide avec son



Hyp. : $\begin{cases} \widehat{A} = \widehat{D}, \\ AC = DF, \\ \widehat{C} = \widehat{F}. \end{cases}$

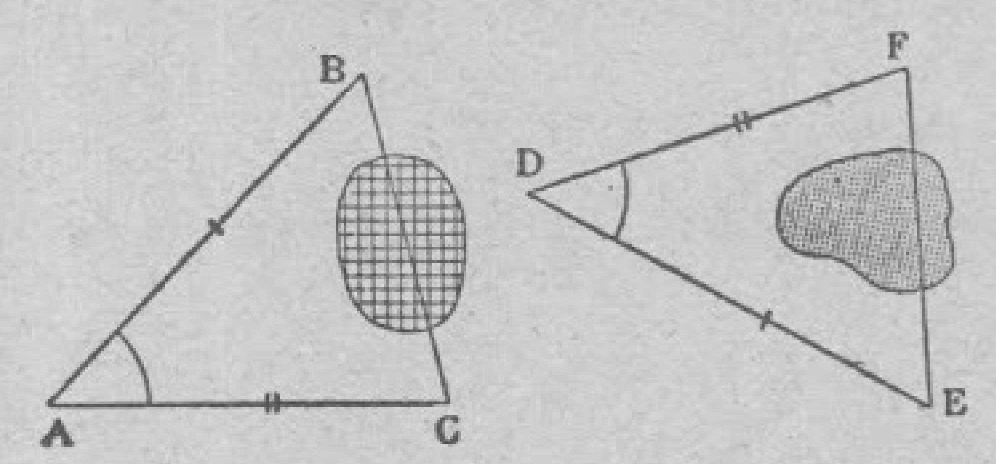
Concl. : Tr. ABC = Tr. DEF.

Fig. 82.

égal A, l'angle F avec son égal C. Le point E doit donc se trouver à la fois sur la droite AB et sur la droite CB. Il vient donc en B et les deux triangles coïncident.

Remarque. — Cette vérification reste possible si les deux triangles ont une partie enlevée (1) au voisinage des sommets B et E. L'égalité des côtés AC et DF, des angles A et D, des angles C et F, **suffit** pour pouvoir affirmer l'égalité des deux triangles.

149. 2e Cas. — *Si deux triangles ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun, ils sont égaux.*



Hyp. : $\begin{cases} AB = DE, \\ \widehat{A} = \widehat{D}, \\ AC = DF. \end{cases}$

Concl. : Tr. ABC = Tr. DEF.

Fig. 83.

Démonstration analogue. Dans le cas de la figure ci-dessus, il faudra retourner le calque.

Remarque. — Cette vérification reste possible si les deux triangles ont une partie enlevée sur le parcours des côtés BC et EF. L'égalité des angles A et D, des côtés AB et DE, des côtés AC et DF suffit pour pouvoir affirmer l'égalité des deux triangles.

(1) Ou inaccessible, sur le terrain, par suite de la présence d'un étang, d'un groupe de maisons, d'une forêt, etc.

150. 3e Cas. — *Si deux triangles ont les trois côtés égaux chacun à chacun, ils sont égaux.*

Transportons le calque du triangle DEF sur le triangle ABC, de manière à placer D en A, F en C (possible, puisque AC = DF), le sommet E tombant du côté opposé à B par rapport à la droite AC

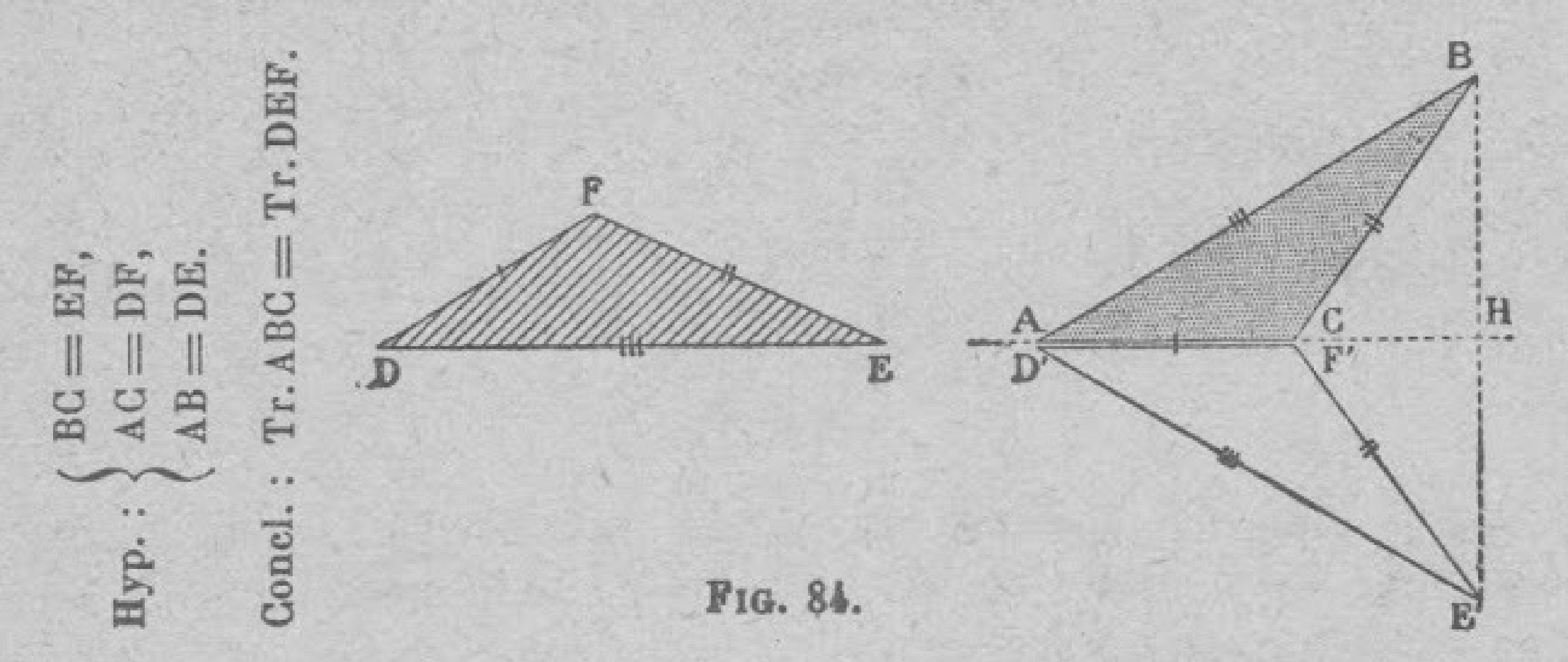


Fig. 84.

qui porte les côtés juxtaposés ; soit E' la nouvelle position du point E. Le point C est équidistant des points B et E' ; le point A, également ; les points A et C se trouvent donc sur la perpendiculaire au milieu de BE' ; en d'autres termes, cette perpendiculaire est justement la droite AC qui porte les côtés juxtaposés. Les deux triangles peuvent donc coïncider par pliage le long de la droite AC (ils sont **symétriques** par rapport à la droite AC), donc ils sont égaux.

Constructions de triangles quelconques.

151. Construction préliminaire. — *Construire un angle égal à un angle donné.*

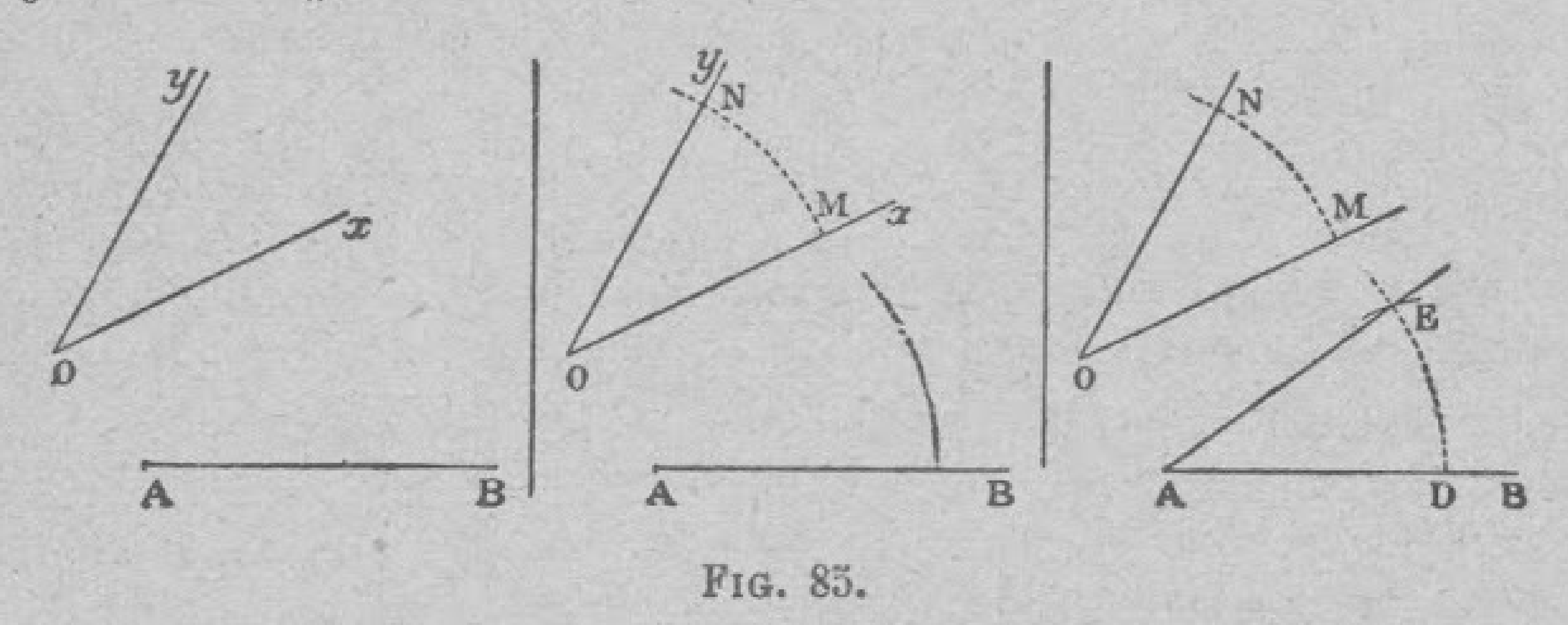


Fig. 85.

1° Justifier la construction indiquée à la figure (3e cas d'égalité des triangles).

2° Comment prendre le rayon du cercle auxiliaire de centre A pour rendre cette construction aussi précise que possible ?

152. Problème I. — *Construire un triangle* ABC *connaissant un côté* BC *et les deux angles adjacents* B *et* C.

1er Exemple : $BC = 50^{mm}$ $\hat{B} = 60^{gr}$ $\hat{C} = 90^{gr}$.

On place d'abord BC. On trouve deux triangles symétriques par rapport à BC, et par suite égaux ; le problème n'a donc qu'une solution.

Remarque. — En conservant les valeurs précédentes pour BC et $\hat{B}$, si $\hat{C}$ prend successivement les valeurs 100^{gr}, 110^{gr}, 120^{gr}..., la construction finit par devenir impossible ; on voit en outre qu'elle commence à l'être quand $\hat{C}$ atteint la valeur 140^{gr}, supplément de $B = 60^{gr}$. Nous trouverons plus loin (n° 226) l'explication de cette constatation graphique.

2e Exemple :

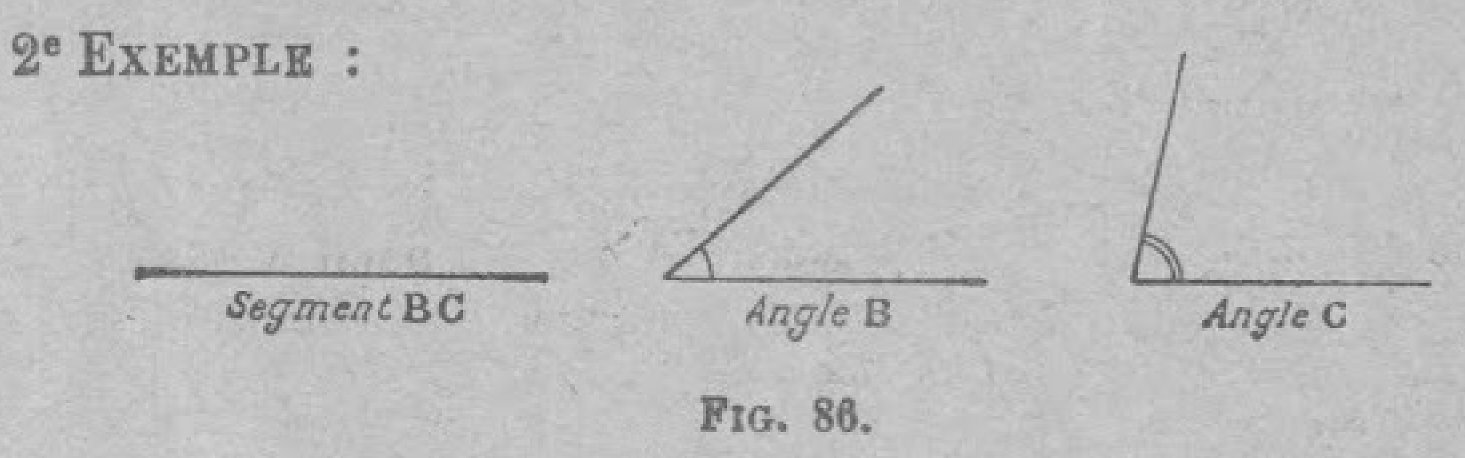


Fig. 86.

153. Problème II. — *Construire un triangle* ABC *connaissant deux côtés* AB, AC *et l'angle compris* A.

1er Exemple : $AB = 50^{mm}$ $AC = 42^{mm}$ $\hat{A} = 80^{gr}$.

On place d'abord l'angle A puis, à partir de A, on prend sur chaque côté les longueurs données.

La construction est toujours possible et ne donne qu'une solution.

2e Exemple :

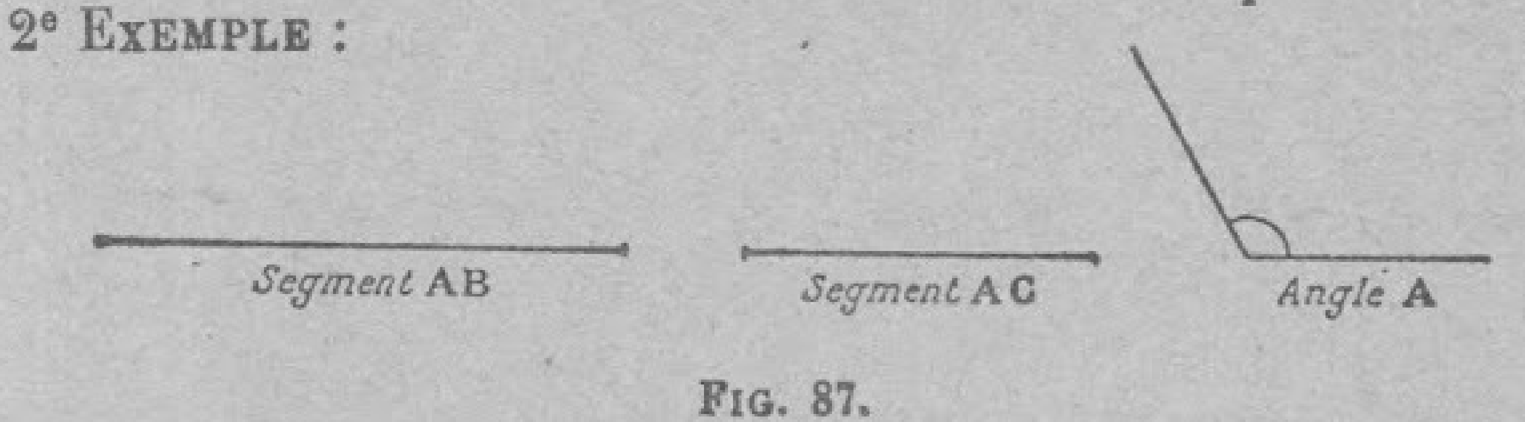


Fig. 87.

154. Problème III. — *Construire un triangle* ABC *connaissant les trois côtés.*

$BC = 30^{mm}$ $AC = 14^{mm}$ $AB = 20^{mm}$.

On place d'abord le plus grand côté BC, puis on trace les cercles

de centres B, C et de rayons respectifs 20^{mm}, 14^{mm}. On trouve

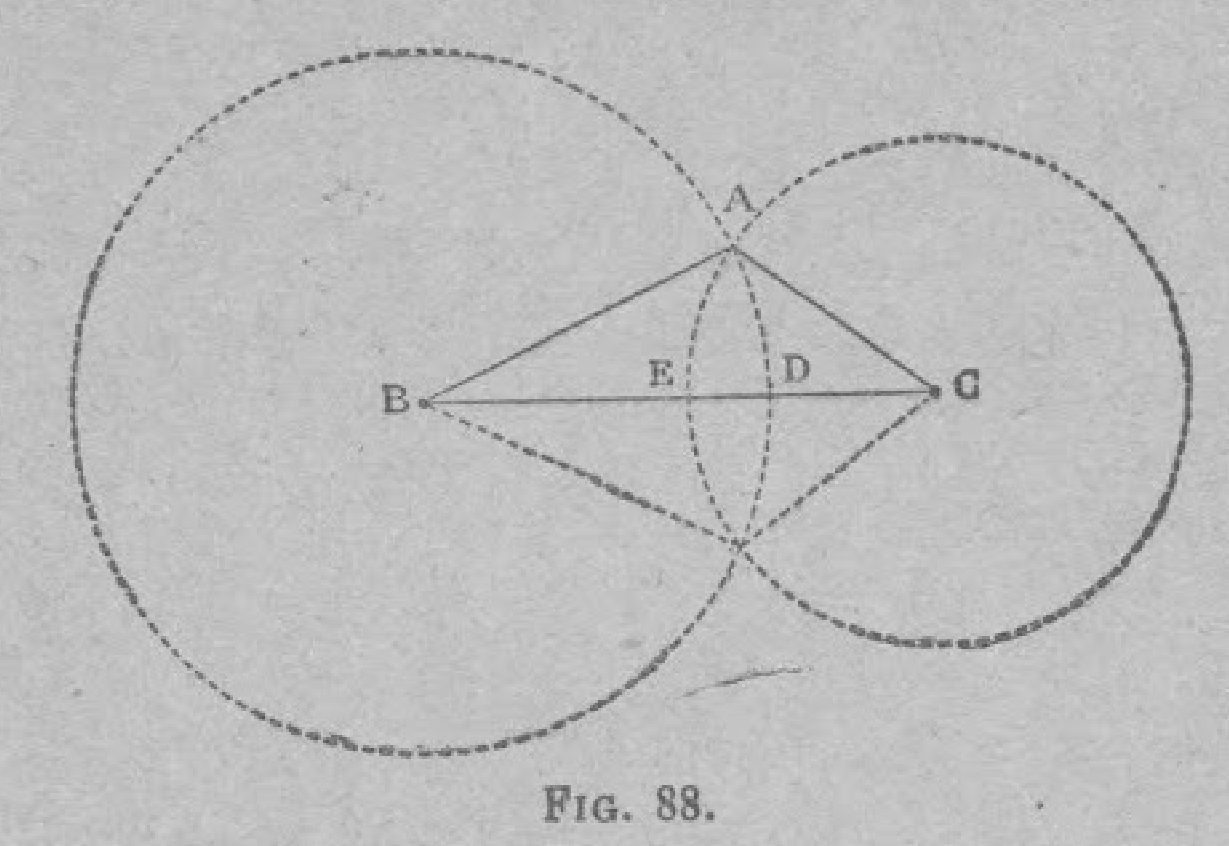


Fig. 88.

deux triangles symétriques par rapport à BC et par suite égaux ; le problème n'a donc qu'une solution.

155. Remarque. — En conservant les valeurs précédentes pour AB et BC, si AC augmente progressivement de 0 à 60^{mm}, le cercle de centre C commence à couper le cercle de centre B, quand son rayon devient supérieur à CD. La figure montre que les rayon BA et CA, rabattus en BD et CE,

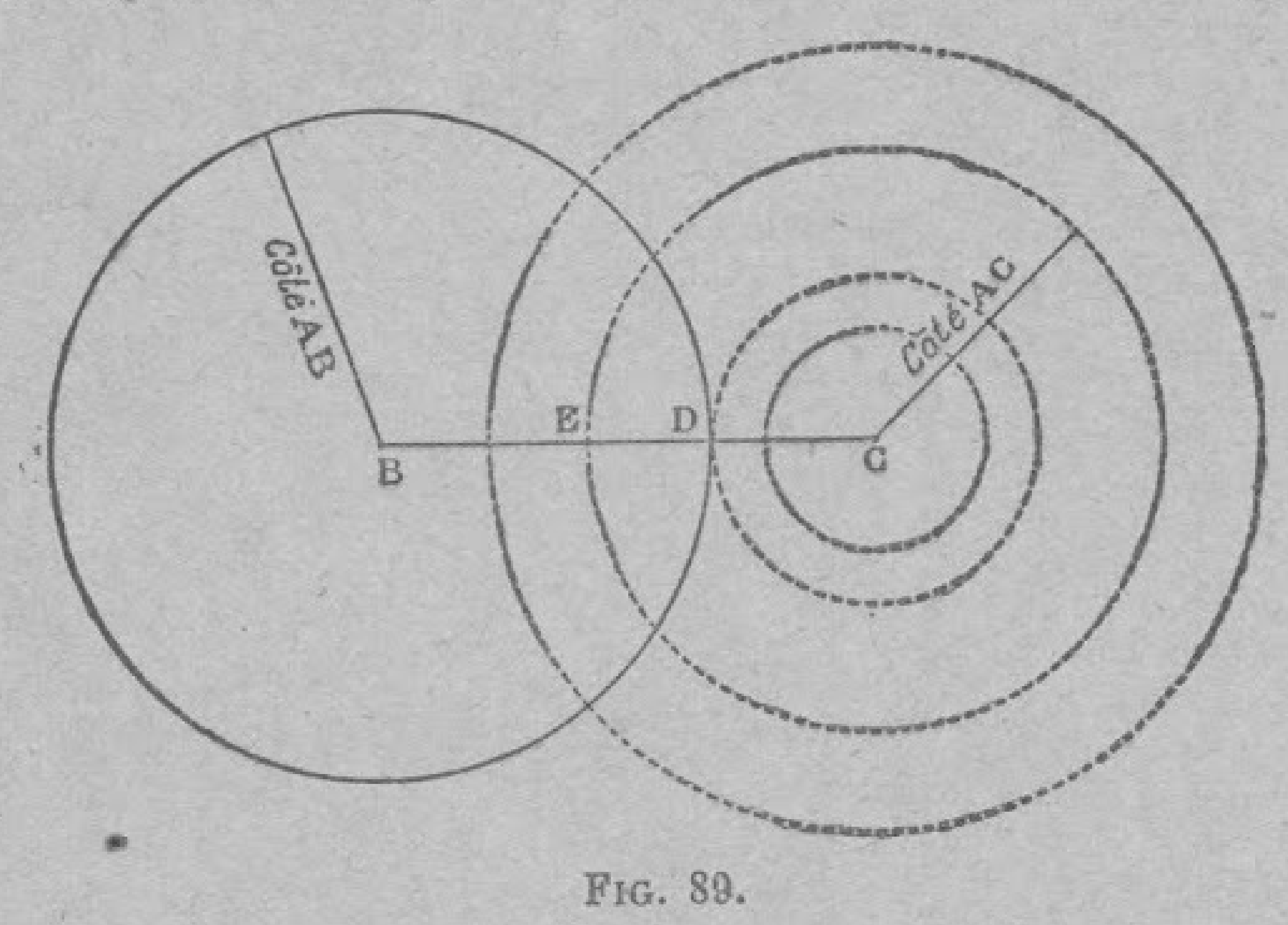


Fig. 89.

sur le côté BC, *se recouvrent alors en partie*, et par conséquent ont une somme supérieure à BC :

$$AC + AB > BC.$$

La construction est donc possible lorsque le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres, et n'est possible que dans ce cas.

156. Remarque II. — Traçons un triangle ABC et soit BC le plus grand côté; il est clair que le parcours BC est plus petit que le parcours BAC; on pouvait donc prévoir que dans un triangle, le plus grand côté est **nécessairement plus petit que la somme des deux autres.**

En résumé :

157. — *Étant donné trois longueurs, pour qu'elles soient les côtés d'un triangle,* **il faut et il suffit** *que la plus grande soit inférieure à la somme des deux autres.*

158. *Étant donné trois longueurs, si*

elles sont les côtés d'un triangle, | *la plus grande est inférieure à la somme des deux autres.*

⟶ (il faut)

⟵ (il suffit).

159. Remarque III. — Dans chacun des trois problèmes précédents nous n'avons trouvé qu'une solution; ce résultat était à prévoir d'après le cas correspondant d'égalité des triangles.

Exercices et constructions.

160. — Les trois côtés d'un triangle sont mesurés (en cm) par des nombres entiers; le plus grand côté est 9; le plus petit est 3. Quel est le côté moyen ? (Deux solutions.)

161. — Les trois côtés d'un triangle sont mesurés (en cm) par des nombres entiers; le périmètre est 13. Quels sont les côtés? (il y a plusieurs solutions).

162. — Trouver tous les triangles dont les côtés sont mesurés chacun par un nombre entier de cm, et dont le périmètre ne dépasse pas 12^{cm}.

163. — Trois tiges rigides (genre Meccano) sont réunies à leurs extrémités par des goupilles. L'ensemble est-il rigide?

164. — Quatre tiges sont réunies par des goupilles de manière à dessiner un quadrilatère. L'ensemble est-il rigide? Sinon, comment peut-on le rendre rigide au moyen d'une cinquième tige?

§ 5. — CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES RECTANGLES

165. 1er Cas. — *Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal, ils sont égaux.*

Imaginons qu'on retourne le triangle ABC autour de AB en ABC′ et le triangle DEF autour de DE en DEF′; pratiquement, il suffit de prolonger CA et FD d'une longueur égale : on obtient un triangle

symétrique de chaque triangle donné. Les triangles totaux BCC′, EFF′, ainsi obtenus sont égaux d'après le 2e cas : ils ont les angles en B, E égaux et compris entre côtés égaux. Puisque les triangles

Hyp. : $\hat{A} = \hat{D} = 100^{gr}$, $BC = EF$, $\hat{B} = \hat{E}$.

Concl. : Tr. ABC = Tr. DEF.

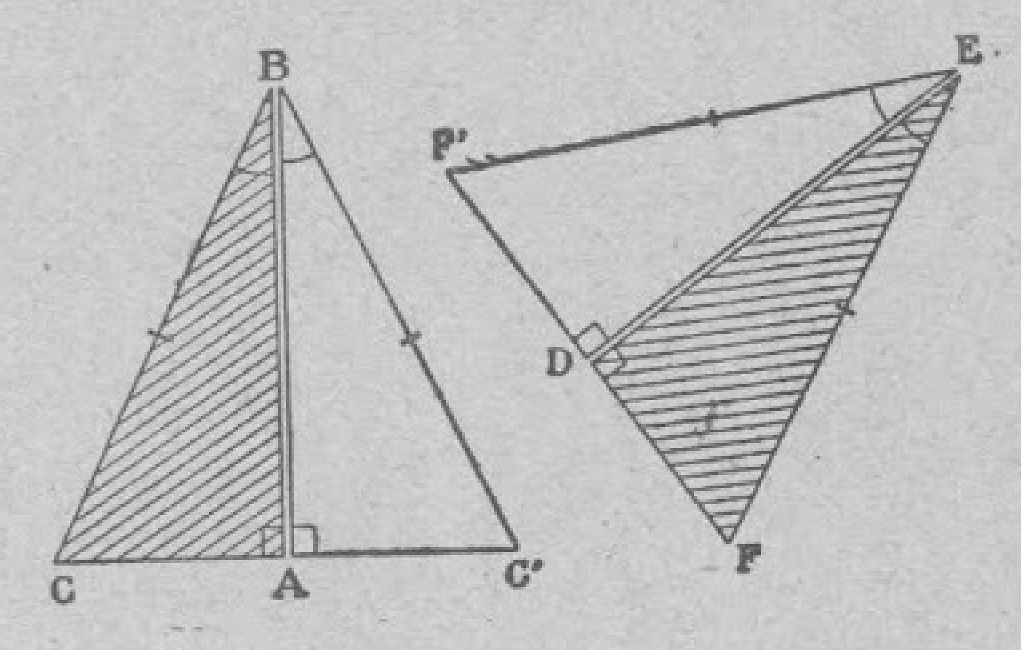


Fig. 90.

BCC′, EFF′ sont superposables, leurs moitiés, ABC et DEF, sont aussi superposables.

166. 2e Cas. — *Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal, ils sont égaux.*

Hyp. $A = D = 100^{gr}$, $BC = EF$, $AC = DF$.

Concl. Tr. ABC = Tr. DEF.

Fig. 91.

Même méthode (fig. 91). Les triangles BCC′, EFF′ sont égaux d'après le 3e cas : ils ont leurs côtés égaux chacun à chacun. Donc leurs moitiés ABC, DEF sont aussi superposables.

Construction de triangles rectangles.

167. Problème I. — *Construire un triangle* ABC, *rectangle en* A, *connaissant l'hypoténuse* BC *et un angle aigu* B.

1er Exemple. $BC = 45^{mm}$ $\hat{B} = 70^{gr}$.

On place d'abord l'angle B, puis BC sur l'un des côtés; le problème a une solution.

2e EXEMPLE.

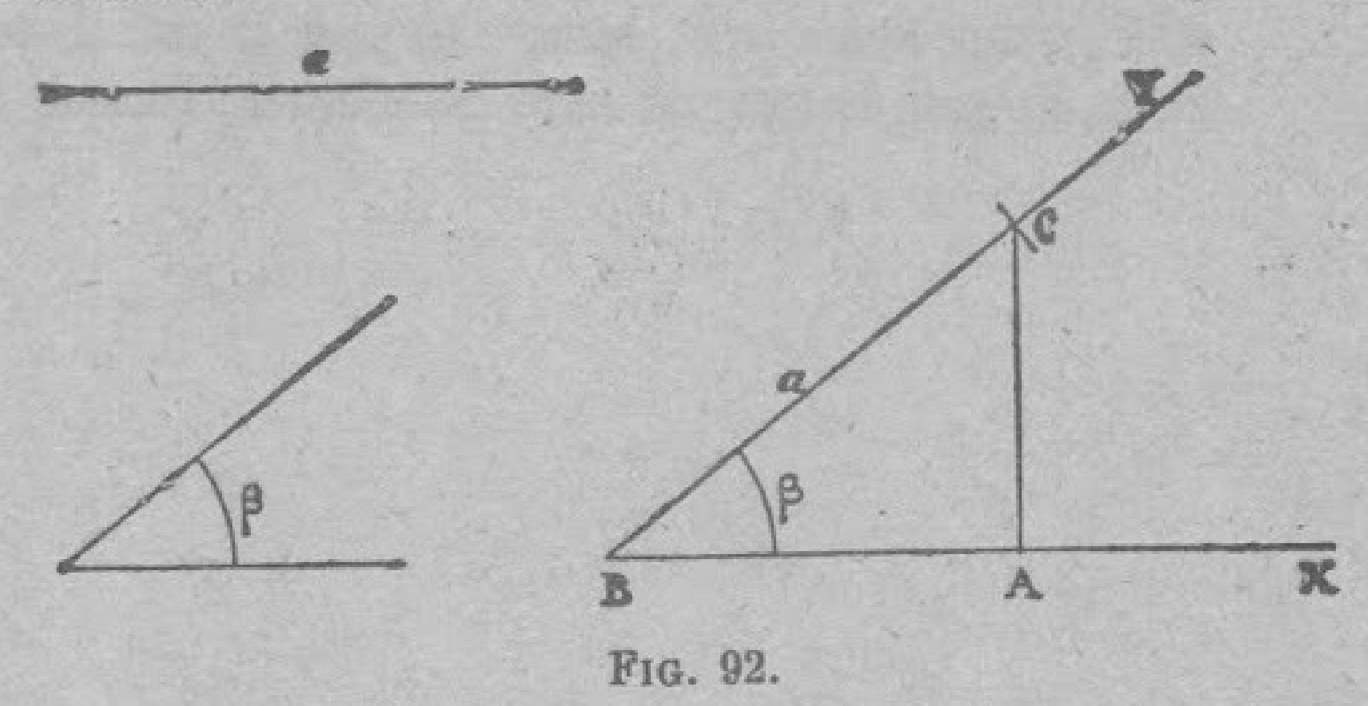


FIG. 92.

168. Problème II. — *Construire un triangle* ABC, *rectangle en* A, *connaissant l'hypoténuse* BC *et un côté de l'angle droit* AB.

EXEMPLE. BC = 50mm AC = 30mm.

On place d'abord AC; B est à la rencontre de la perpendiculaire en A à AC avec le cercle de centre C et de rayon 50mm. On trouve 2 triangles symétriques par rapport à AC et par suite égaux; le problème n'a donc qu'une solution.

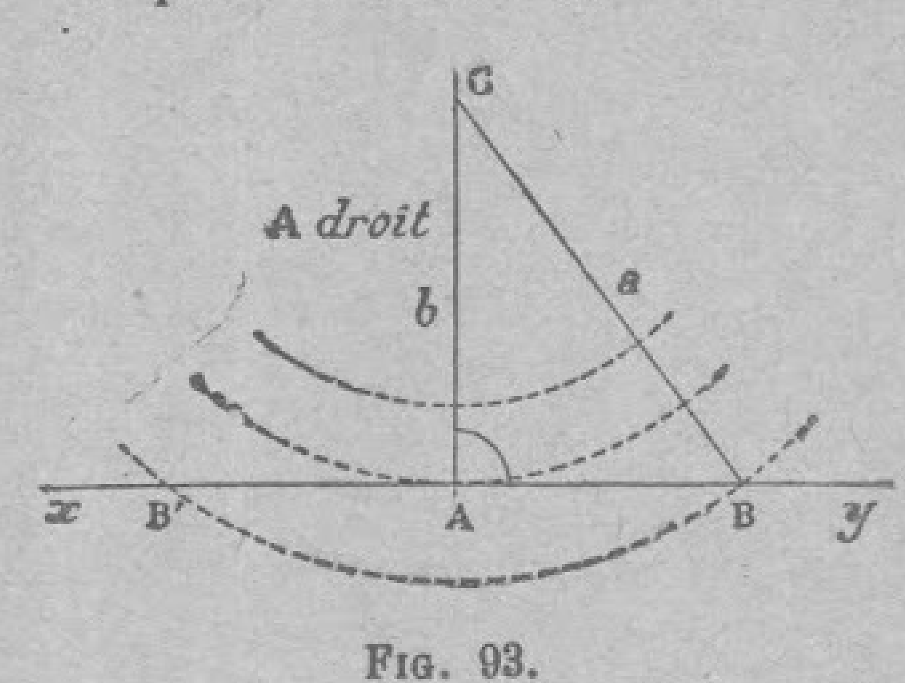


FIG. 93.

169. REMARQUE I. — Si on conserve la même valeur pour AC, mais si on suppose que BC augmente à partir de 0, on voit que la construction est possible dès que BC est supérieur à AC. On savait déjà (133) que cette condition devait être nécessairement remplie.

170. REMARQUE II. — Dans chacun des deux problèmes précédents, nous n'avons trouvé qu'une solution. Ce résultat était à prévoir d'après le cas correspondant d'égalité des triangles rectangles.

§ 6. — PROPRIÉTÉ DE LA BISSECTRICE D'UN ANGLE

171. Définition. — On appelle **distance** d'un point à une droite la longueur de la perpendiculaire menée du point à la droite.

172. Théorème. — *Si un point d'un angle est équidistant des deux côtés de l'angle, il est sur la bissectrice de l'angle.*

En effet les triangles OMH, OMK sont rectangles; ils sont égaux (2e cas) donc les angles en O qui sont opposés à des côtés égaux sont égaux.

Hypothèses.	Conclusion.
H = 100gr K = 100gr MH = MK	$\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$.

FIG. 94.

173. Théorème réciproque. — *Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, il est équidistant des côtés de l'angle.*

Montrer que les triangles OHM et OKM sont rectangles et égaux.

Hypothèses.	Conclusion.
$\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$ H = 100gr K = 100gr	MH = MK.

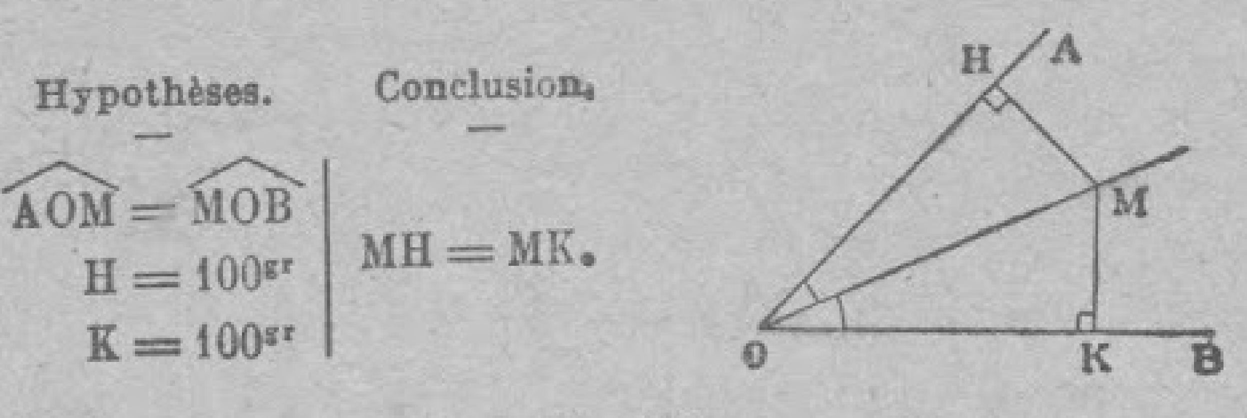


FIG. 95.

174. Résumé. — *Pour qu'un point d'un angle soit équidistant des côtés* **il faut et il suffit** *qu'il appartienne à la bissectrice de cet angle.* On peut encore résumer ainsi.

Si on suppose que :

M, *intérieur à l'angle* AOB, *est équidistant des côtés de l'angle.*	M *est sur la bissectrice de l'angle* AOB.

⟶ (il faut)
⟵ (il suffit).

175. Conséquence. — *Le lieu géométrique des points équidistants de deux droites qui se coupent est constitué par deux droites rectangulaires* (1), *bissectrices de leurs angles.*

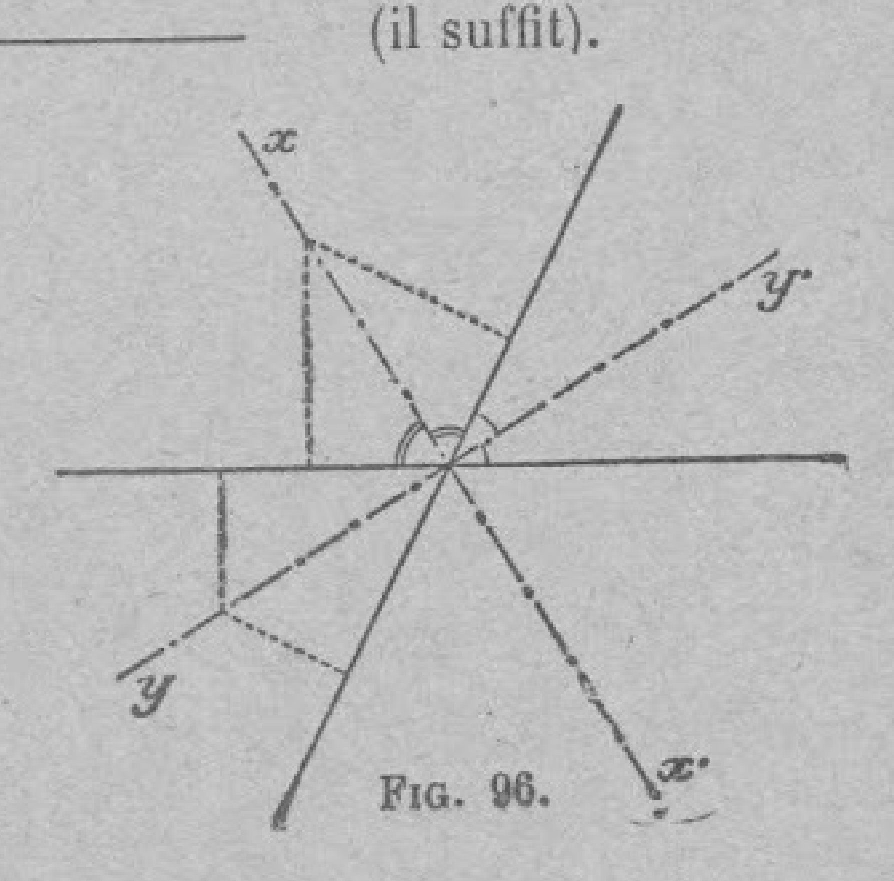


FIG. 96.

176. Application. — Les

(1) Rectangulaires veut dire : perpendiculaires l'une sur l'autre.

3 bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes.

Soit I le point de rencontre des bissectrices des angles B et C.

Étant sur la bissectrice de l'angle B, on a ID = IF.

Étant sur la bissectrice de l'angle C, on a ID = IE.

Donc (en comparant) IE = IF, ce qui prouve que I appartient à la bissectrice de l'angle A.

FIG. 97.

177. REMARQUE. — **On démontre de même que les bissectrices extérieures de 2 angles d'un triangle et la bissectrice intérieure du 3e angle, passent par un même point.**

Constructions et vérifications.

178. — Construire un triangle ABC ayant pour côtés BC = 66, AC = 55, AB = 46 (unité : mm); construire les 3 bissectrices intérieures. Vérifier qu'elles sont concourantes et que le point commun est équidistant des 3 côtés.

179. — Construire un triangle connaissant $BC = 60^{mm}$, $\widehat{B} = 80^{gr}$, $C = 50^{gr}$; construire les bissectrices extérieures des angles B et C (avec le rapporteur) et la bissectrice intérieure de l'angle A (avec le compas). Vérifier qu'elles sont concourantes et que le point commun est équidistant des trois côtés.

180. — Construire un triangle ABC connaissant les sommets B, C et le point de rencontre I des bissectrices intérieures (équerre, règle et bande de papier).

181. — Construire un triangle isocèle ABC (AB = AC) connaissant le sommet A, le point de rencontre I des bissectrices intérieures, et l'angle A, 120^{gr} (rapporteur, équerre, règle et bande de papier).

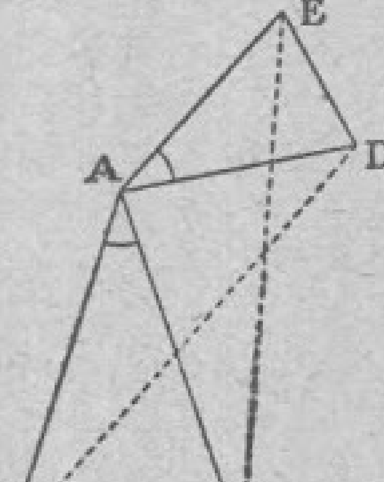


FIG. 98.

Exercices théoriques.

182. — Deux triangles isocèles ABC et ADE ont le sommet commun A, et des angles au sommet égaux. On joint BD et CE. Montrer que les deux triangles ABD et ACE sont égaux, et en déduire que BD = CE.

183. — Dans un triangle ABC, il se trouve que les *hauteurs* BE, CF sont *égales*. Traduire par des egalités les mots soulignés. Que peut-on dire des triangles BCF et BCE? Quelles nouvelles égalités peut-on écrire? Qu'en déduit-on pour le triangle ABC?

184. — Soit ABC un triangle, AD une *médiane*. Montrer que les points B et C sont à la même *distance* de la droite AD.

185. — Dans un triangle ABC, il se trouve que la *bissectrice* intérieure est aussi *hauteur*. Traduire ce fait au moyen de 2 égalités. Chercher sur la figure des triangles égaux. Quelles nouvelles égalités peut-on écrire? Qu'en déduire pour le triangle ABC?

186. — Sur les côtés d'un angle O, on porte 2 segments OA et OB égaux, puis, dans le même sens, 2 autres segments AC et BD égaux; on joint AD, BC, qui se coupent en I.

1° Étudier les triangles OAD et OBC;
2° — — BID et AIC;
3° — — IOD et IOC.

En déduire un tracé de la bissectrice d'un angle au moyen de la règle et de la bande de papier.

§ 7. — COMPARAISON DES CÔTÉS ET DES ANGLES DANS LES TRIANGLES

I. Comparaison des côtés.

187. — Soit un triangle ABC; on peut aller de B en C soit en suivant le segment BC, soit en suivant les segments BA et AC. Nous regarderons comme évident que le 1er parcours est plus court que le 2e; donc :

Dans un triangle, un côté quelconque est inférieur à la somme des deux autres.

FIG. 99.

188. REMARQUE. — Considérons trois segments ayant pour longueurs 3^{cm}, 5^{cm} et 9^{cm} : il est clair que le plus petit segment 3^{cm} et le segment moyen 5^{cm} sont chacun inférieurs à la somme des deux autres, même s'il n'existe pas de triangle ayant ces segments pour côtés (ce qui est ici le cas). Si nous considérons maintenant les trois côtés AB, BC, CA, d'un triangle et si nous supposons que BC est le plus grand, le fait que ce sont les côtés d'un triangle se traduit *spécialement* par le fait que le *plus grand côté* BC est inférieur à la somme des deux autres; cependant la forme générale de l'énoncé précédent est nécessaire parce qu'on ignore le plus souvent quel est le plus grand côté des triangles que l'on considère.

189. Conséquence. — ***Dans un triangle un côté quelconque est supérieur à la différence des deux autres.***

Je dis, par exemple, que

$$AB > BC - AC.$$

En effet, je viens de démontrer que

$$BC < AB + AC.$$

Si on retranche AC aux 2 membres, on trouve

$$BC - AC < AB,$$

qui n'est autre que l'inégalité annoncée.

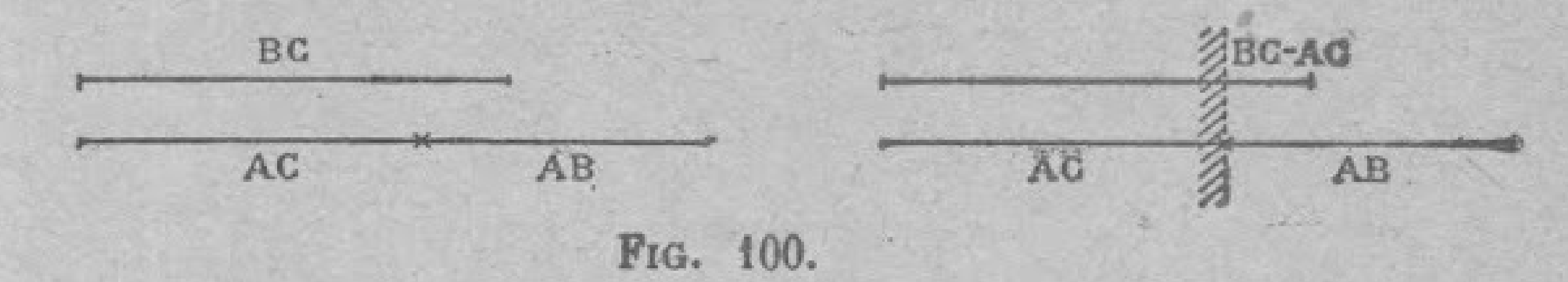


Fig. 100.

190. Résumé. — *Un côté quelconque d'un triangle est compris entre la somme et la différence des deux autres.*

191. Généralisation de l'énoncé n° 187. — *Un segment de droite* AB *est plus court que toute ligne brisée ayant les mêmes extrémités* (*fig.* 101).

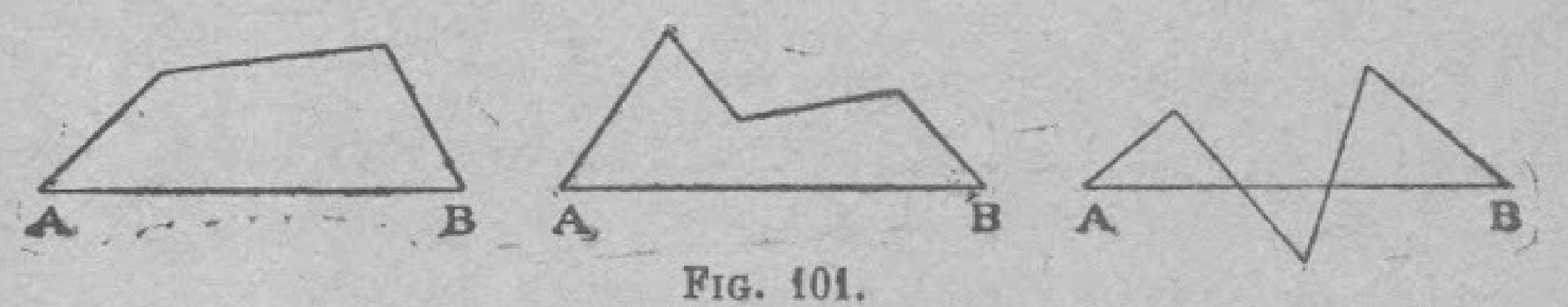


Fig. 101.

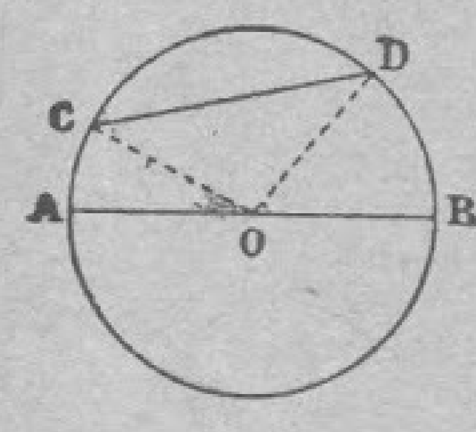


Fig. 102.

192. Application. — *Une corde quelconque d'un cercle est plus courte qu'un diamètre.*

Dans le triangle COD, on a

$$CD < OC + OD,$$

ou (puisque les rayons sont égaux)

$$CD < OA + OB$$
$$CD < AB.$$

II. Comparaison des côtés et des angles.

193. Théorème. — *Dans un triangle, à un plus grand angle est opposé un plus grand côté.*

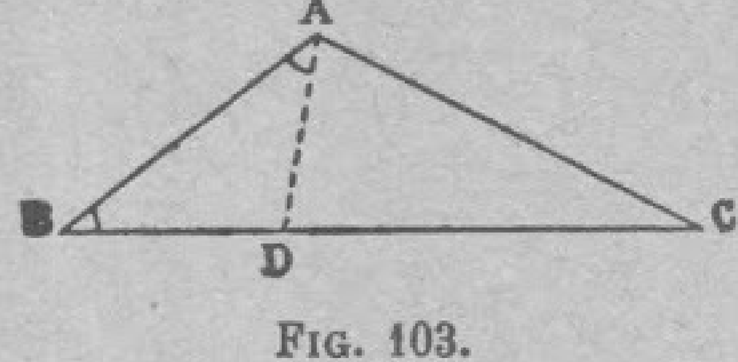


Fig. 103.

Soit ABC un triangle dans lequel on suppose l'angle A supérieur à l'angle B. Construisons sur le côté AB, et vers l'intérieur du triangle l'angle BAD égal à l'angle B.

Puisque $\widehat{B} < \widehat{A}$, l'angle BAD sera compris dans l'angle A et le

2° côté AD de cet angle coupera BC en un point D situé entre B et C ; donc $BC = BD + DC$.

D'autre part, le triangle BAD est isocèle (2 angles égaux) et $BD = AD$, de sorte que

$$BC = AD + DC.$$

Quant au côté AC, on a dans le triangle ADC :

$$AC < AD + DC.$$

En comparant, on voit que l'on a bien $BC > AC$.

194. Énoncé équivalent. — *Dans un triangle les côtés sont rangés dans le même ordre de grandeur que les angles opposés.*

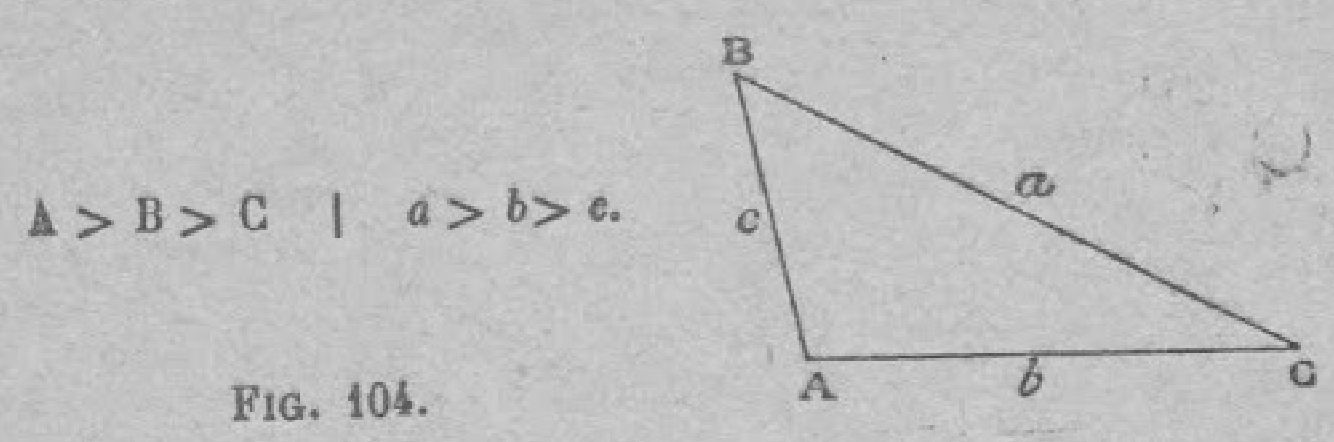


Fig. 104.

Exercices.

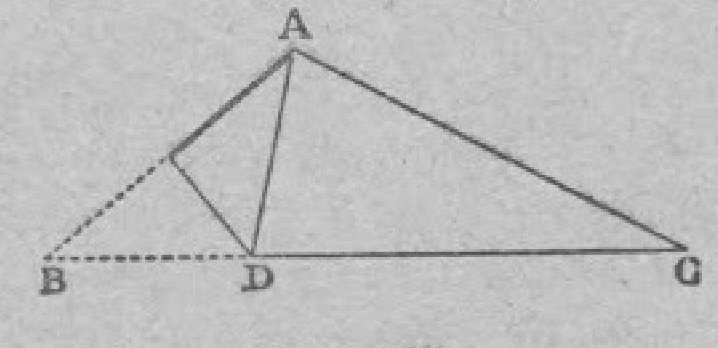


Fig. 105.

195. — Réaliser par pliage la démonstration du théorème 193. Suivant quelle droite plie-t-on ?

196. — Construire plusieurs triangles dont deux côtés sont 30 et 40mm, l'angle compris étant successivement $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$ d'angle droit. Mesurer le 3e côté et vérifier qu'il augmente avec l'angle opposé.

§ 8. — COMPARAISON DE LA PERPENDICULAIRE ET DES OBLIQUES MENÉES D'UN POINT A UNE DROITE

197. Théorème. — *Si d'un point* O *extérieur à une droite, on lui mène la perpendiculaire et diverses obliques :*

1° la perpendiculaire est plus courte que toute oblique ;

2° *si 2 obliques ont leurs pieds équidistants du pied de la perpendiculaire* ([1]), *elles sont égales;*

3° *si 2 obliques sont inégalement écartées du pied de la perpendiculaire, celle qui s'écarte le plus est la plus longue.*

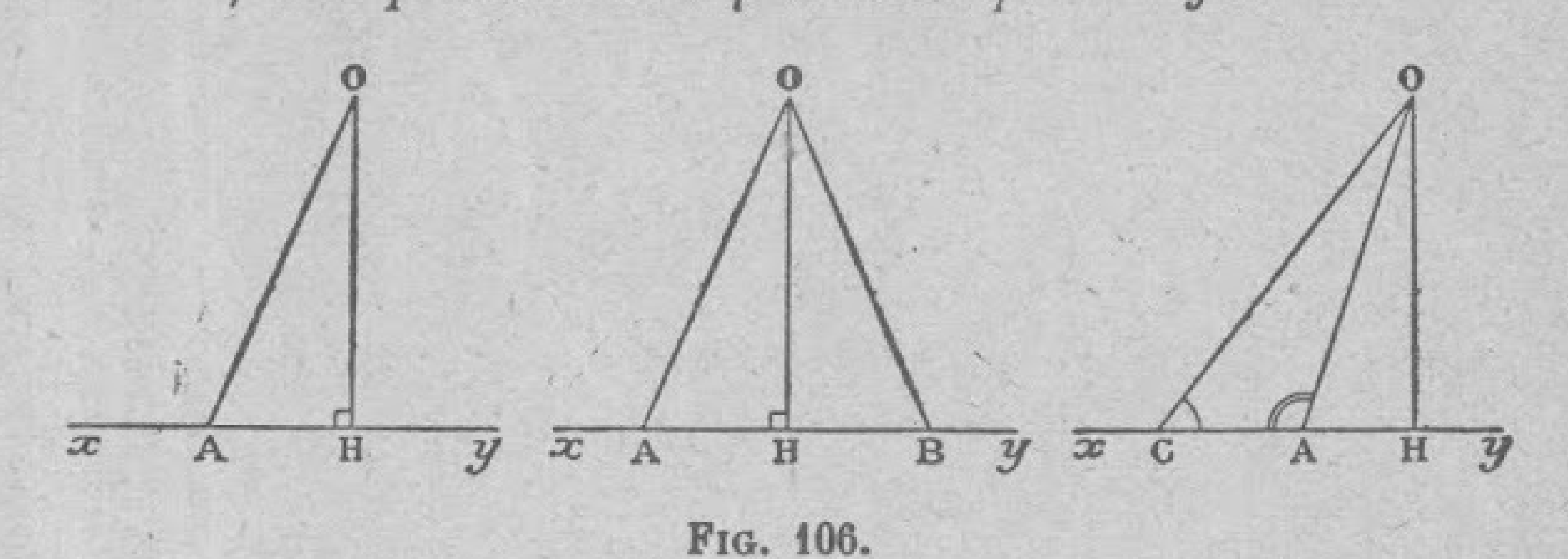


Fig. 106.

1° Soit OH la perpendiculaire menée de O à la droite xy et soit OA une oblique quelconque. On a vu que dans un triangle rectangle OAH, le côté de l'angle droit OH est inférieur à l'hypoténuse.

Autrement dit la perpendiculaire OH est plus courte que l'oblique OA.

2° Hypothèse : $HA = HB$. Je dis que $OA = OB$. En effet, O appartient à la médiatrice du segment AB. Donc $OA = OB$.

3° Hypothèse : $HC > HA$. Je dis que $OC > OA$. Soient deux obliques OA et OC situées *d'un même côté* de OH. Dans le triangle OCA l'angle C est aigu, l'angle A est obtus. Donc : $\hat{A} > \hat{C}$. Au plus grand angle est opposé le plus grand côté. Donc on a bien $OC > OA$.

Supposons maintenant que les obliques données OB et OC ont leurs pieds de part et d'autre de H avec $HB < HC$. Je dis que $OB < OC$. On prendra, du côté de C, $HA = HB$ et on tracera l'oblique OA. D'après la démonstration précédente (2e cas) $OA = OB$, mais on vient de voir que

$$OA < OC.$$

Donc : $OB < OC$.

198. Théorème réciproque. — *On considère les différents segments allant d'un point O à une droite xy :*

1° *si le segment* OH *est plus court que tout autre, la droite* OH *est perpendiculaire à xy;*

2° *si 2 obliques sont égales, elles sont également écartées du pied de la perpendiculaire;*

(1) Ou : « sont *également écartées du pied de la perpendiculaire* ».

3° *si 2 obliques sont inégales, la plus grande s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.*

1° Hypothèse : OH est le segment le plus court de O à xy. Je dis que OH est perpendiculaire à xy. Sinon, la perpendiculaire OH', distincte de OH serait plus courte que OH (théorème direct) de sorte que OH ne serait pas le segment le plus court, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° Hypothèse : $OA = OB$; je dis que : $HA = HB$.

En effet, si $HA \neq HB$, on a $OA \neq OB$ (3e partie du théorème direct), ce qui est contraire à l'hypothèse.

(Exercice : démonstration directe. Triangle OAB isocèle.)

3° Hypothèse : $OA < OC$; je dis que : $HA < HC$. Sinon, on aurait $HA = HC$, ou bien $HA > HC$; donc, d'après le théorème direct, il en résulterait $OA = OC$ ou bien $OA > OC$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Résumé.

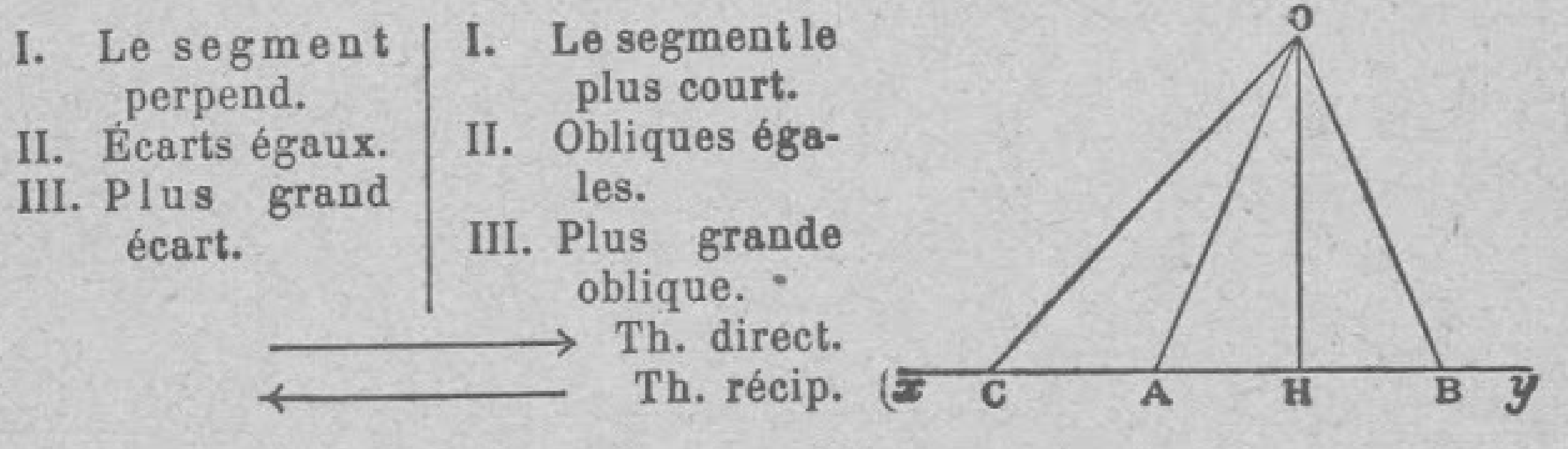


Fig. 107.

Exercices.

199. — Construire un triangle ABC connaissant la hauteur issue de A, $AH = 40^{mm}$ et les 2 côtés $AB = 50^{mm}$, $AC = 70^{mm}$.

(On trace d'abord la hauteur HA, puis la droite illimitée qui porte le côté BC on trouvera 2 points pour B, deux pour C; soit en tout 4 triangles, deux à deux symétriques par rapport à AH.)

200. — Construire un triangle connaissant un côté $BC = 84^{mm}$, la hauteur $AH = 40^{mm}$ et la médiane $AM = 50^{mm}$ relatives à ce côté.

(On construira d'abord le triangle AHM.)

201. — Soit ABC un triangle rectangle en A. On marque un point D sur AB, un point E sur AC et on joint DE. Quel est le plus grand des segments DE et BC? (Chercher un segment intermédiaire.)

CHAPITRE III

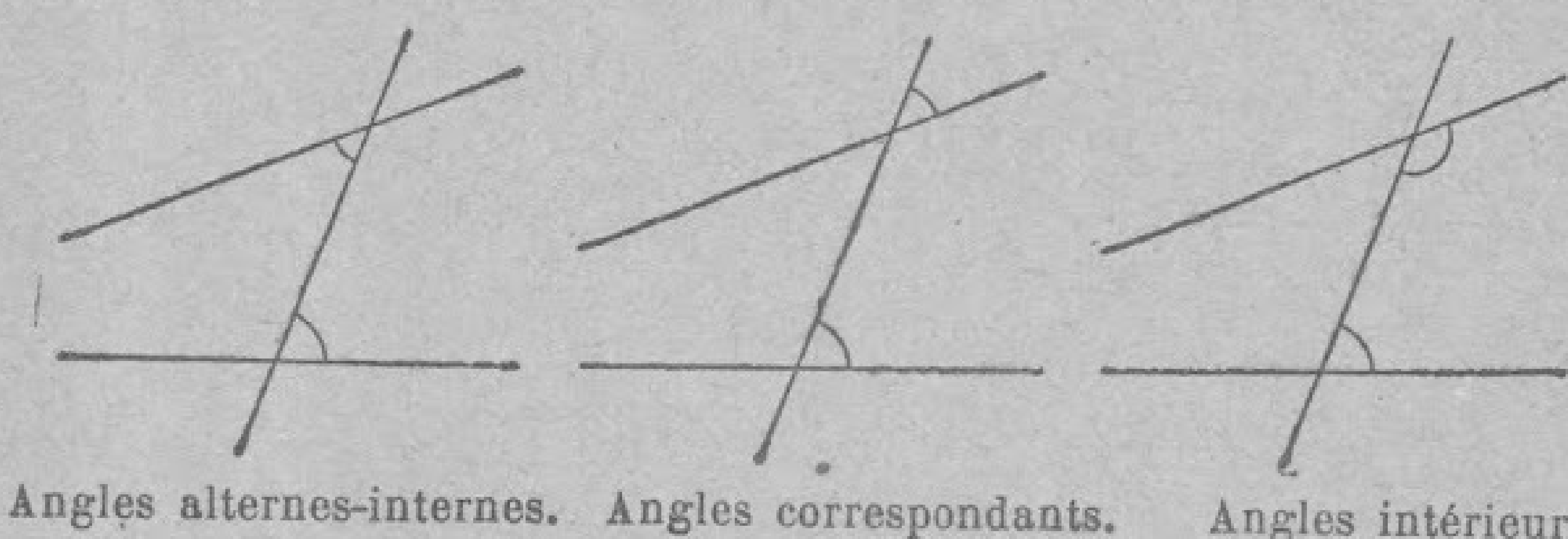
LES PARALLÈLES

§ 1. — PARALLÈLES

202. Définitions. — Deux droites étant coupées par une troisième (sécante), on appelle :

angles alternes-internes, deux angles situés de part et d'autre de la sécante, intérieurs, non adjacents;

angles correspondants, deux angles situés d'un même côté de la sécante, l'un intérieur, l'autre extérieur;



Angles alternes-internes. Angles correspondants. Angles intérieurs d'un même côté.

Fig. 108.

angles intérieurs d'un même côté, deux angles situés entre les deux droites, d'un même côté de la sécante.

203. Droites parallèles. — On appelle **droites parallèles** deux droites qui n'ont pas de point commun. (Ne pas oublier que les droites doivent être regardées comme *illimitées*.)

204. Théorème. — *Si deux droites forment avec une sécante :*

ou bien deux angles alternes-internes égaux,

ou bien deux angles correspondants égaux,

ou bien deux angles intérieurs d'un même côté supplémentaires,

elles sont parallèles.

Supposons égaux les angles alternes internes *a* et *b* (fig. 109).

Faites tourner de 2ᴰ autour de I, milieu de EF, la partie de la figure qui est à gauche de la sécante. Démontrez qu'elle vient exactement s'appliquer sur la partie qui est à droite. (Vérifiez au moyen du calque.)

Il en résulte que AB et CD n'ont pas de point commun, car si elles se rencontraient à gauche de EF, elles se rencontreraient aussi

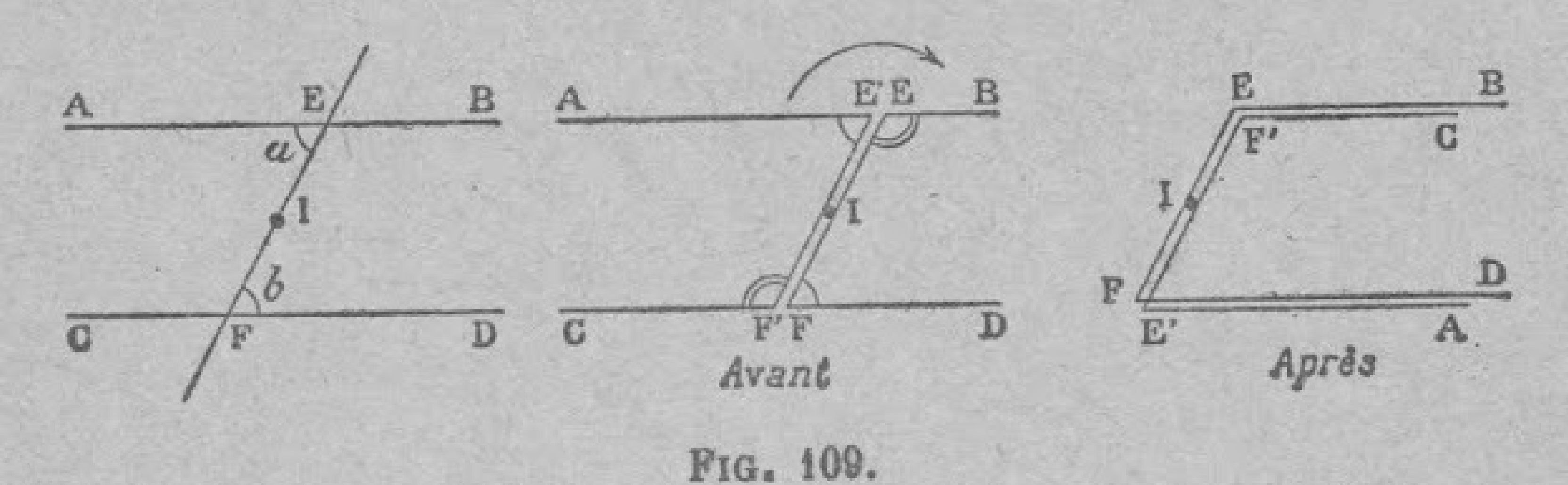


Fig. 109.

à droite, et auraient ainsi *deux* points communs ce qui est impossible. Donc AB et CD sont parallèles.

Montrer que les deux autres cas (angles correspondants égaux, angles intérieurs d'un même côté supplémentaires) se ramènent au cas d'angles alternes-internes égaux.

205. Cas particulier. — *Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles.*

206. Construction. — Mener d'un point A une parallèle à une droite donnée *xy*.

1° *Avec le rapporteur et la règle.*

Par le point A, on mène une sécante qui coupe la droite donnée *xy* en B et on construit en A un angle alterne-interne égal à AB*y*.

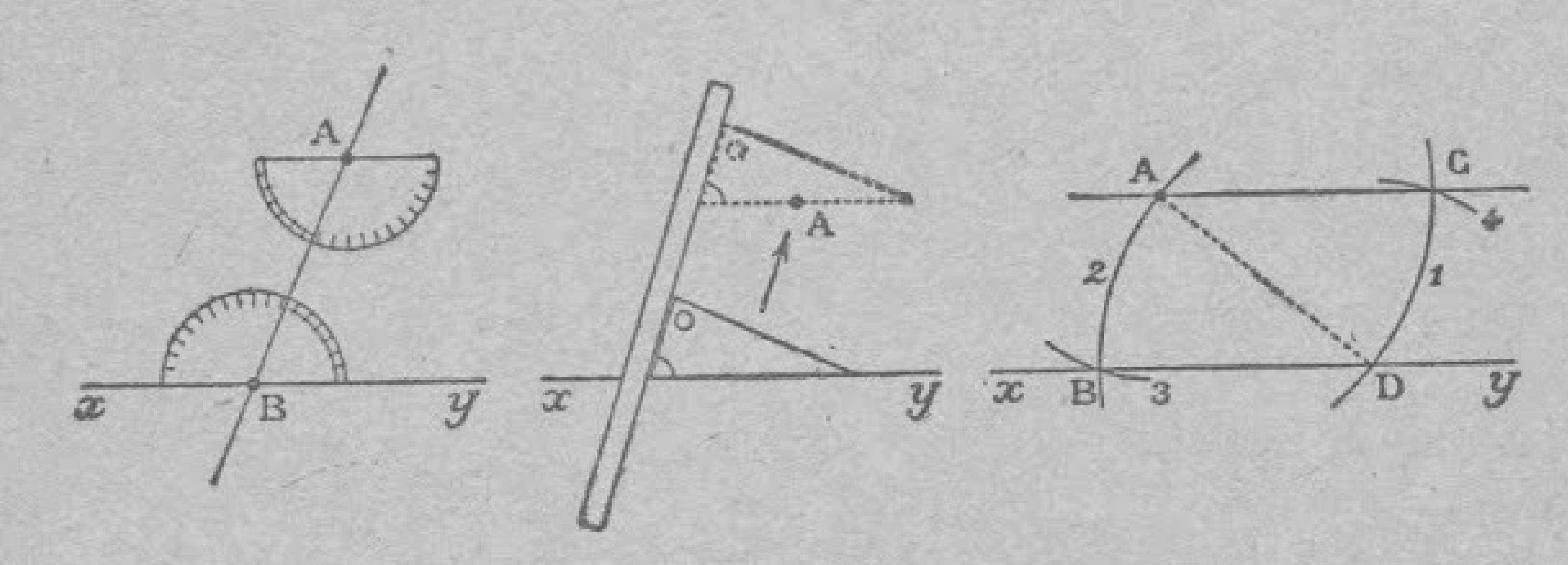


Fig. 110.

2° *Avec l'équerre et la règle.*

Justifier la construction indiquée par la figure ci-dessus.

3° *Avec le compas et la règle.*

On opère comme précédemment, mais on construit les angles égaux au moyen du compas et de la règle.

4° *Par découpage et collage.* Découper deux angles égaux dans une feuille de papier double, ou deux angles supplémentaires dans une feuille

simple ; les coller sur une feuille en rapprochant 2 côtés de manière que les côtés non en coïncidence soient parallèles.

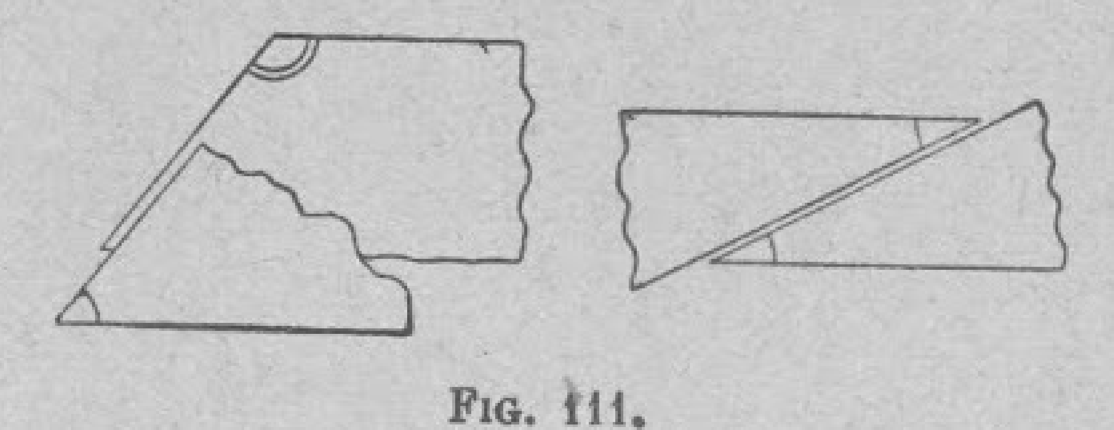


FIG. 111.

207. — On peut donc mener par un point une parallèle à une droite.

On admet qu'on ne peut en mener qu'une (POSTULAT D'EUCLIDE [1]) et on a l'énoncé suivant :

208. — *Par un point pris hors d'une droite on peut mener à cette droite une parallèle et une seule.*

Conséquences. 209. I. *Si deux droites sont parallèles à une troisième, elles sont parallèles entre elles*, car si elles se coupaient, du point de rencontre seraient issues deux parallèles à la troisième droite, ce qui est impossible.

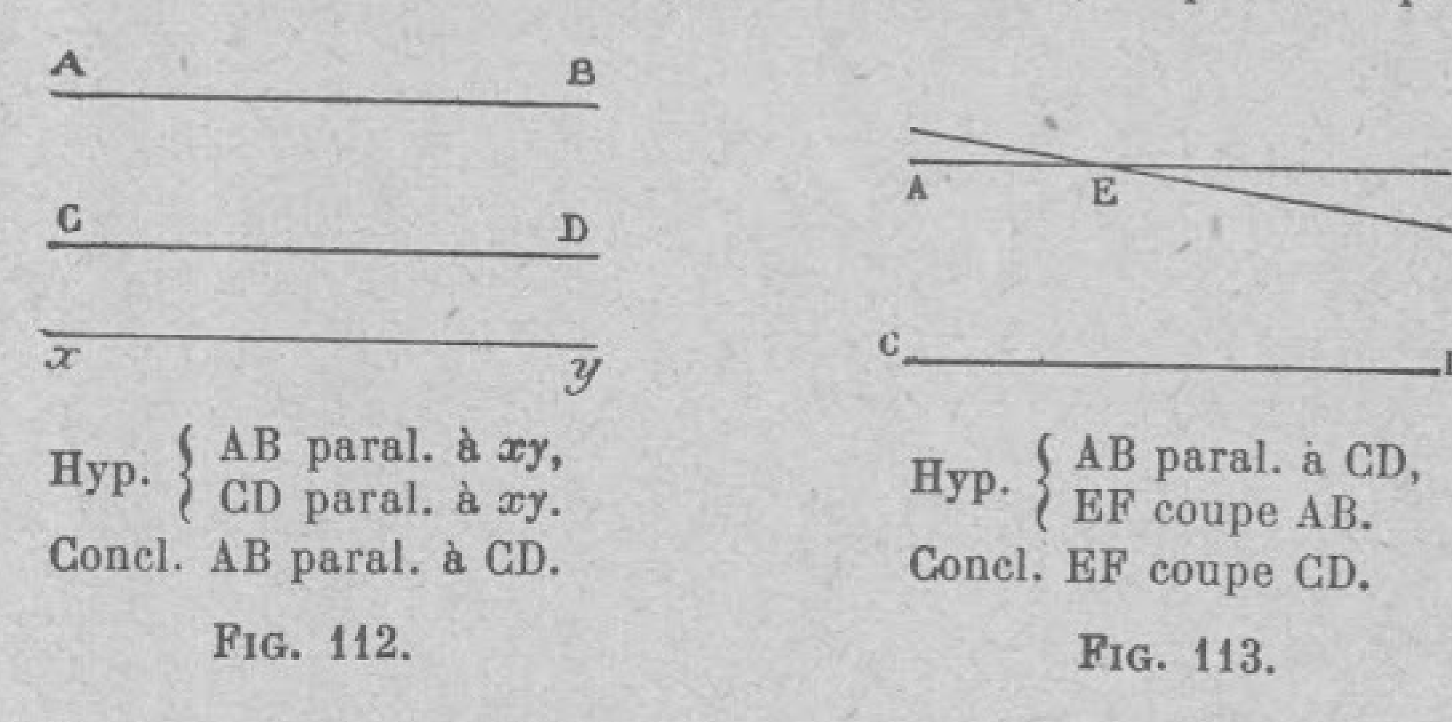


FIG. 112. FIG. 113.

210. II. — *Si 2 droites sont parallèles et qu'une troisième coupe la première, elle coupe aussi la seconde (fig. 113)*, sinon, on aurait par le point E deux parallèles à CD, ce qui est impossible.

211. Théorème (réciproque du n° 204). — *Si deux droites sont parallèles, elles font avec une sécante des angles alternes-internes égaux, des angles correspondants égaux, des angles intérieurs d'un même côté supplémentaires.*

(1) EUCLIDE, géomètre grec qui enseignait à Alexandrie sous le règne de Ptolémée Ier (306-283 avant J.-C.).

Soit les droites parallèles AB, CD, coupées par une sécante EF. Je vais montrer que les angles alternes-internes $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont **égaux. Construisons en effet en** E un angle alterne-interne *d* égal à $\widehat{b}$. Soit A'B' la droite obtenue ; elle est parallèle à CD (théorème direct). Elle se confond donc avec AB (Postulat d'Euclide).

L'angle alterne-interne égal à ***b*****, c'est donc l'angle** ***a*****.**

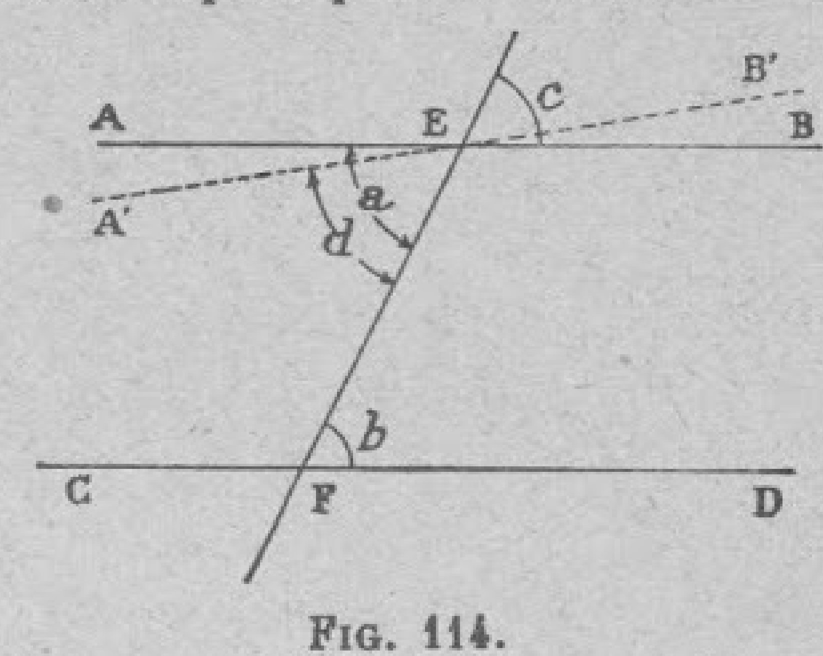


FIG. 114.

212. Conséquence. — *Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.*

Exercices théoriques.

Le parallélisme de deux droites équivaut à une égalité d'angles.

213. — Étant donné un angle ABC, on mène par un point I de sa bissectrice la parallèle à l'un des côtés, BC par exemple. Elle rencontre l'autre en un point M. Que peut-on dire du triangle BIM?

214. — Par le point de rencontre I des bissectrices intérieures des angles B et C d'un triangle ABC, on mène la parallèle MN au côté BC. Montrer que le segment MN est égal à la somme des segments BM et CN : MN = BM + CN.

FIG. 115.

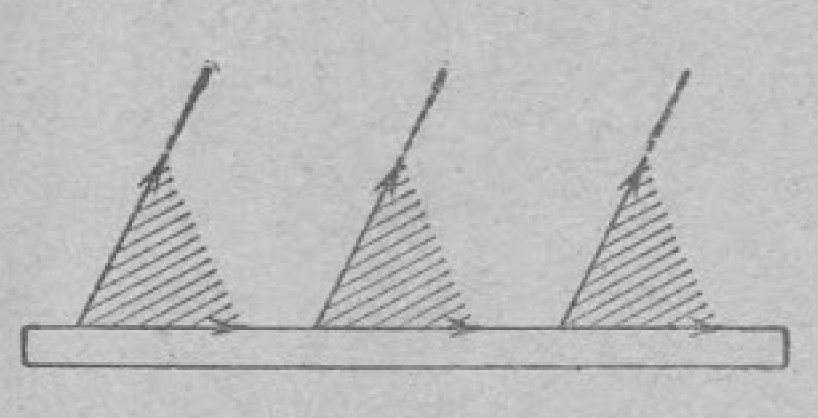
215. — Soit un cercle de centre O. Par les extrémités A et B d'un diamètre, on trace 2 cordes parallèles AC et BD. Comparer les triangles OAC et OBD. Que peut-on dire des 3 points C, O, D?

§ 2. — ANGLES AYANT LEURS CÔTÉS PARALLÈLES

216. Glissement d'un angle sur un de ses côtés. — Considérons un angle en carton ou en bois (par exemple l'un des angles d'une équerre); faisons glisser l'un de ses côtés sur le bord d'une règle maintenue fixe; traçons sur le papier quelques-unes des positions ainsi obtenues ; nous obtenons des *angles correspondants* ; les différentes positions du côté mobile sont *parallèles et de même sens*.

(Le déplacement de cet angle est une translation; il sera étudié plus loin.)

Après avoir fait glisser l'angle AOB sur le côté OA jusqu'en MIN, faisons-le glisser sur l'autre côté IN jusqu'en une certaine position A'O'B'; *les deux angles* AOB, A'O'B' *ont leurs côtés parallèles et de même sens.*



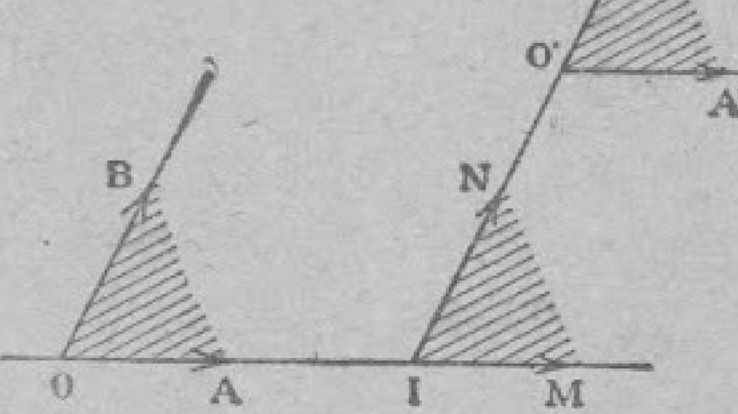


Fig. 116.

Inversement, si deux angles AOB, A'O'B' ont leurs côtés parallèles et de même sens, on peut faire glisser le premier angle sur un côté, puis sur l'autre jusqu'à le faire coïncider avec l'autre angle A'O'B'. Donc :

217. Théorème. — *Si deux angles ont leurs côtés parallèles et de même sens, ils sont égaux.*

218. Corollaire I. — *Si deux angles ont leurs côtés parallèles et de sens contraire, ils sont égaux.*

Car l'angle opposé à l'un d'eux a ses côtés parallèles et de même sens à ceux de l'autre (*fig.* 117).

Fig. 117 et 118.

219. Corollaire II. — *Si deux angles ont leurs côtés parallèles, deux de même sens et deux de sens contraire, ils sont supplémentaires.*

Car l'un des angles adjacents supplémentaires à l'un d'eux a ses côtés parallèles et de même sens à ceux de l'autre (*fig.* 118).

220. Remarque. — **Si deux angles à côtés parallèles sont :**
1° tous deux aigus ou tous deux obtus, ils sont égaux,
2° l'un aigu et l'autre obtus, ils sont supplémentaires.

Angles à côtés perpendiculaires.

221. Théorème. — *Si deux angles ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, ils sont égaux ou supplémentaires.*

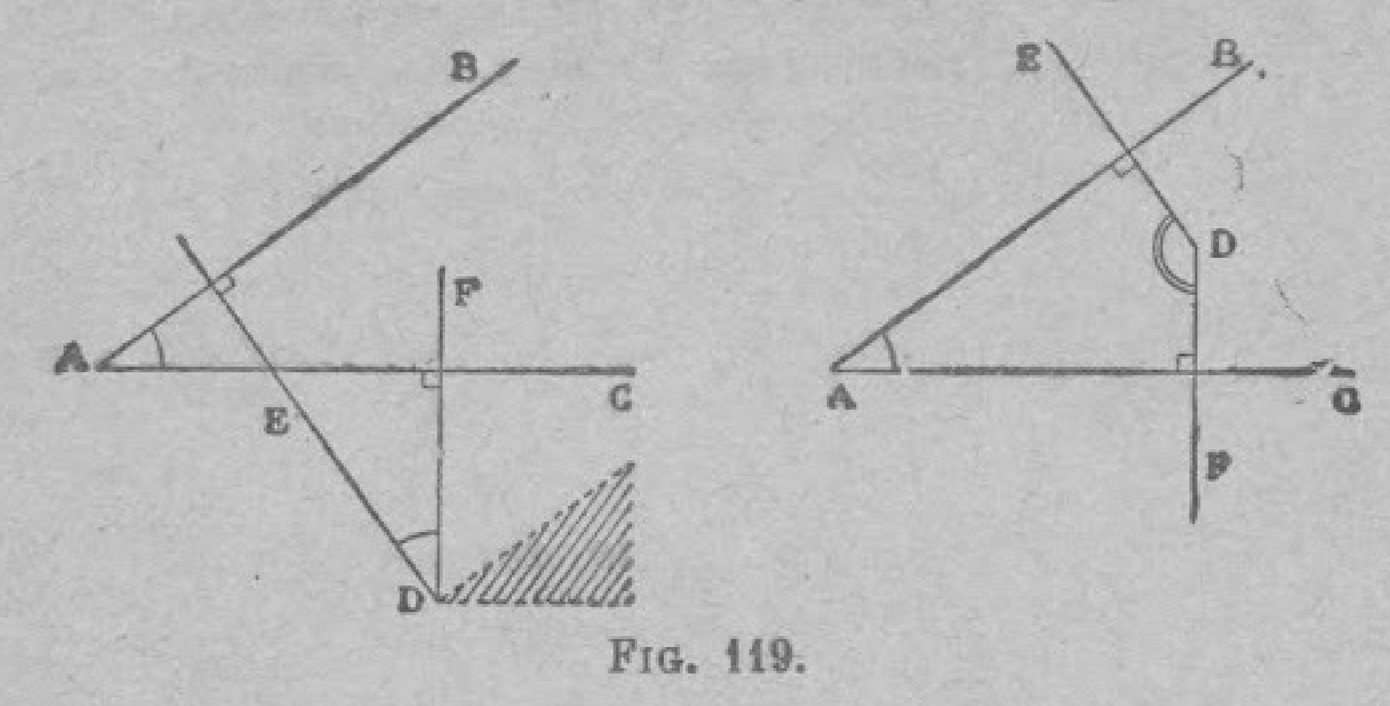


Fig. 119.

En effet, en faisant tourner l'un des angles de 1^D autour de son sommet, ses côtés deviennent parallèles aux côtés de l'autre. On est donc ramené au théorème précédent.

222. Remarque. — Comme ci-dessus.

223. Exercice. — Construire un triangle ABC connaissant $A = 67^{gr}$, $AB = 75^{mm}$, $AC = 58^{mm}$; mener les hauteurs issues de B et de C. Calculer les angles qu'elles forment entre elles.

§ 3. — SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE, D'UN POLYGONE CONVEXE

224. Théorème. — *La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits.*

Prolongeons AC au delà de C et menons par C la demi-droite CE parallèle à AB et du même côté de AC que le triangle. Considérons les angles ainsi formés.

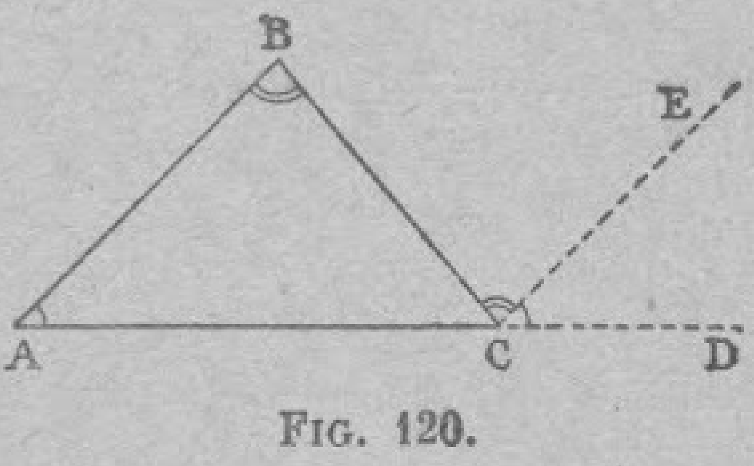


Fig. 120.

D'une part :

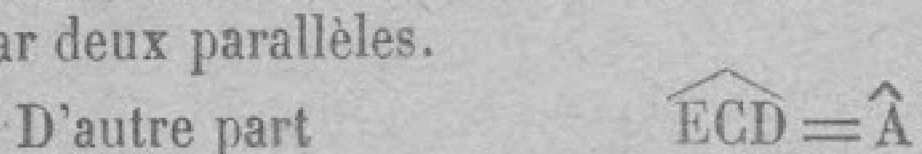


$$\widehat{BCE} = \widehat{B}$$

comme alternes-internes formés par deux parallèles.

D'autre part $\widehat{ECD} = \widehat{A}$

comme correspondants formés par deux parallèles.



Donc : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \widehat{ECD} + \widehat{BCE} + \widehat{C} = 2$ droits.

225. Énoncé équivalent. — *Dans un triangle, chaque angle extérieur est égal à la somme des angles intérieurs non adjacents.*

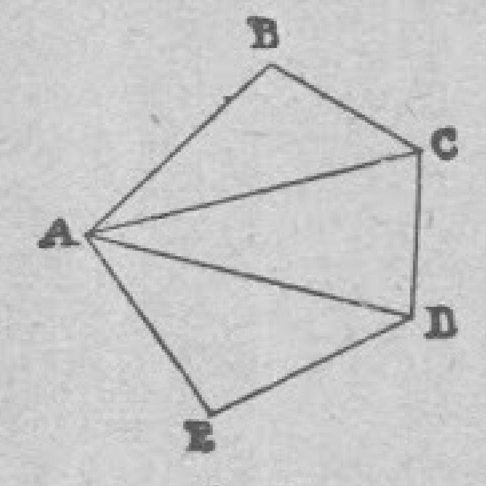
Conséquences. 226. — La somme de deux angles d'un triangle doit être inférieure à 2^{D} (Voir la construction n° 152). Donc *un triangle ne peut pas avoir plus d'un angle droit, ni plus d'un angle obtus.*

227. — *Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires.*

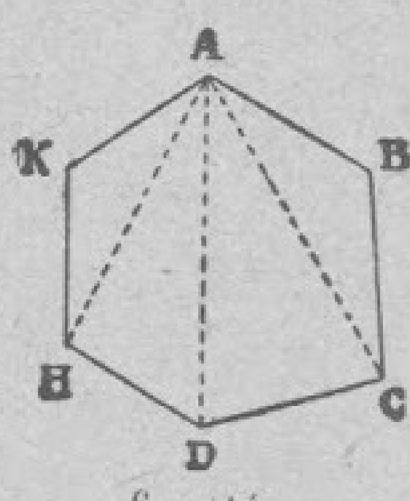
228. — *Les angles d'un triangle équilatéral valent chacun deux tiers d'angle droit* $\left(\frac{2^{D}}{3}\right)$.

229. — *Connaissant 2 angles d'un triangle, on peut calculer le troisième.* Si deux triangles ont 2 angles égaux chacun à chacun, les 3es angles sont aussi égaux.

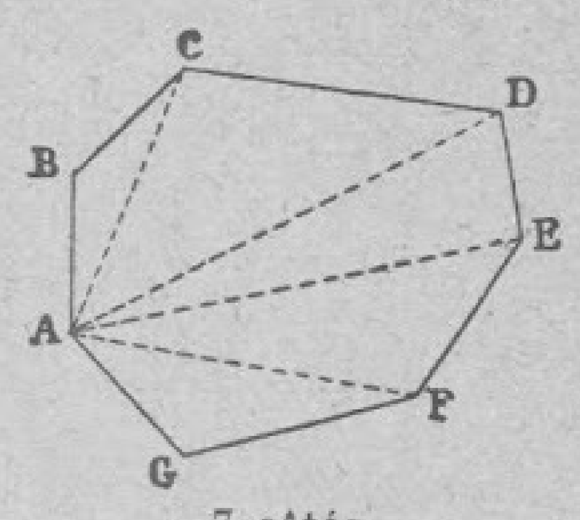
230. Théorème. — *La somme des angles d'un polygone convexe vaut autant d'angles plats que le polygone a de côtés, moins deux.*



5 côtés
3 triangles
3 angles plats.



6 côtés
4 triangles
4 angles plats.



7 côtés
5 triangles
5 angles plats.

FIG. 121.

Vérifications.

231. — Vérifier le théorème pour un triangle et pour un quadrilatère.
1° au moyen du rapporteur (mesurer chaque angle et additionner).
2° au moyen d'une construction (faire la somme d'angles égaux à ceux de la figure).

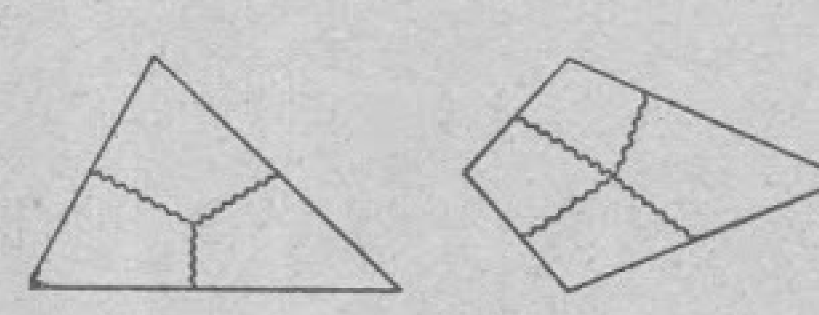


FIG. 122.

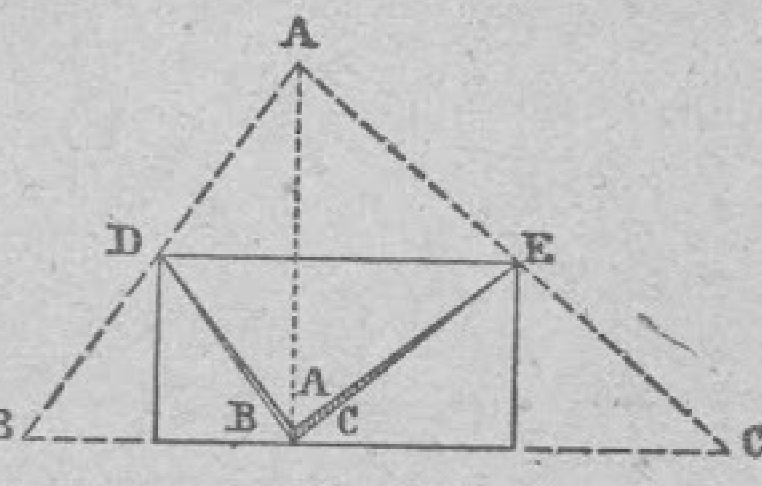


FIG. 123.

3° par découpage des angles et addition par collage.
4° (pour le triangle) par pliage; BC étant le plus grand côté.

232. REMARQUE. — Le théorème s'étend à un polygone *concave*, mais *non croisé*. Soit par exemple un polygone de 10 côtés, découpé dans du papier; enlevons-lui un triangle en coupant le long d'une diagonale : il reste un polygone de 9 côtés. En répétant 6 fois cette opération on aboutit à un polygone de 9 — 6 = 3 côtés, c'est-à-dire à un triangle.

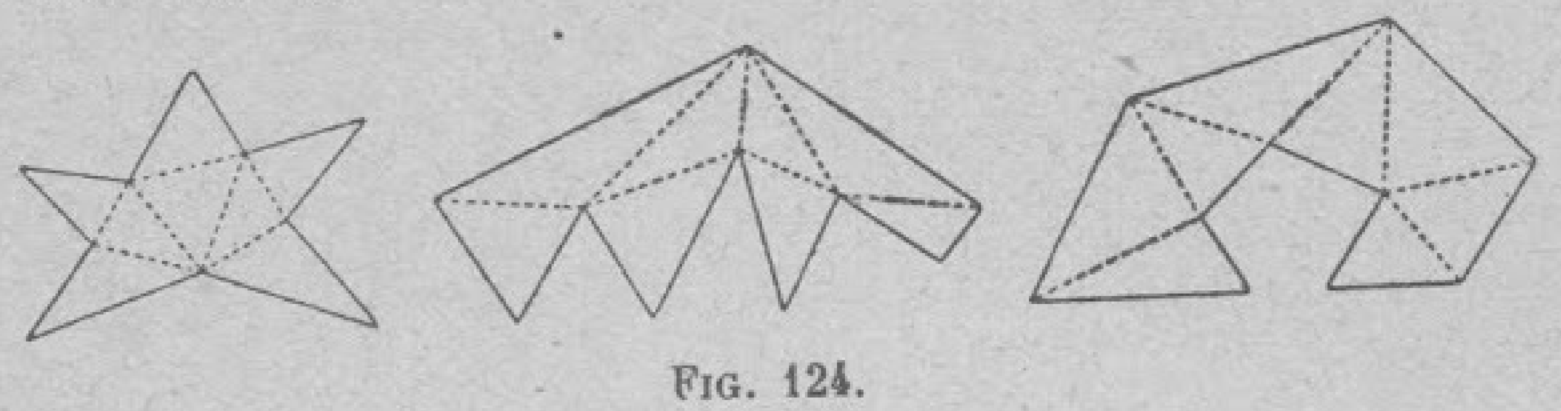


FIG. 124.

Quels que soient la forme et le mode de découpage du polygone, on voit que :
1° on le découpe en 8 triangles au moyen de 7 diagonales;
2° la somme de ses angles vaut 8 angles plats.

Exercices.

233. — Dans un triangle ABC on connaît $\widehat{B} = 63^{gr}$, $\widehat{C} = 82^{gr}$. Calculer $\widehat{A}$.

234. — Dans un triangle isocèle, un angle est triple d'un autre; calculer en grades les angles du triangle (2 cas à envisager).

235. — Dans un triangle rectangle, un angle est les $\frac{2}{3}$ d'un autre; calculer en grades les angles du triangle (2 cas à envisager).

236. — Construire un triangle ABC connaissant $a = 85^{mm}$, $B = 63^{gr}$, $C = 72^{gr}$; mener les bissectrices intérieures des angles B et C. Calculer les angles qu'elles forment.

237. — Construire un triangle isocèle ABC connaissant $A = 38^{gr}$, $b = c = 65^{mm}$; construire, du côté du triangle, un angle CBE égal à l'angle A. Évaluer les divers angles de la figure et en déduire que certains segments sont égaux. Le vérifier avec le double décimètre.

238. — Un polygone convexe de 9 côtés a tous ses angles égaux. Évaluer l'un de ces angles.

239. — La somme des angles d'un polygone convexe est $1\,000^{gr}$. Combien a-t-il de côtés?

240. — Construire avec la règle et le compas un angle de $\frac{2^{D}}{3}$, de $\frac{1^{D}}{3}$.

241. — Soit un triangle ABC, AE une *bissectrice* intérieure. Sur le prolongement de BA, on porte un segment AD *égal* à AC et on joint DC. Traduire les mots soulignés au moyen d'égalités entre les *angles* de la figure, et trouver 4 angles égaux entre eux. En déduire une propriété des droites AE et DC.

242. — Construire (rapporteur et double décimètre) un quadrilatère convexe ABCD connaissant $AB = 88^{mm}$, $BC = 61^{mm}$; $A = 48^{gr}$, $B = 105^{gr}$, $C = 143^{gr}$. Mener les bissectrices intérieures des angles. Calculer : 1° l'angle D; 2° l'angle aigu x des bissectrices des angles A et B; 3° l'angle aigu y des bissectrices des angles C et D.

243. — Dans un triangle ABC, rectangle en A, l'angle B vaut 34^{gr}. On mène la hauteur AH et la bissectrice AD de l'angle HAB. Évaluer : 1° les angles consécutifs formés en A ; 2° l'angle CAD et l'angle CDA. Comparer les segments CA et CD.

244. — Dans un triangle isocèle ABC l'angle au sommet A vaut 78^{gr}. On porte sur la base la longueur BA en BD et la longueur CA en CE ; on joint AD, AE. Évaluer les angles : 1° du triangle ABC ; 2° du triangle ADE.

§ 4. — TRAPÈZE

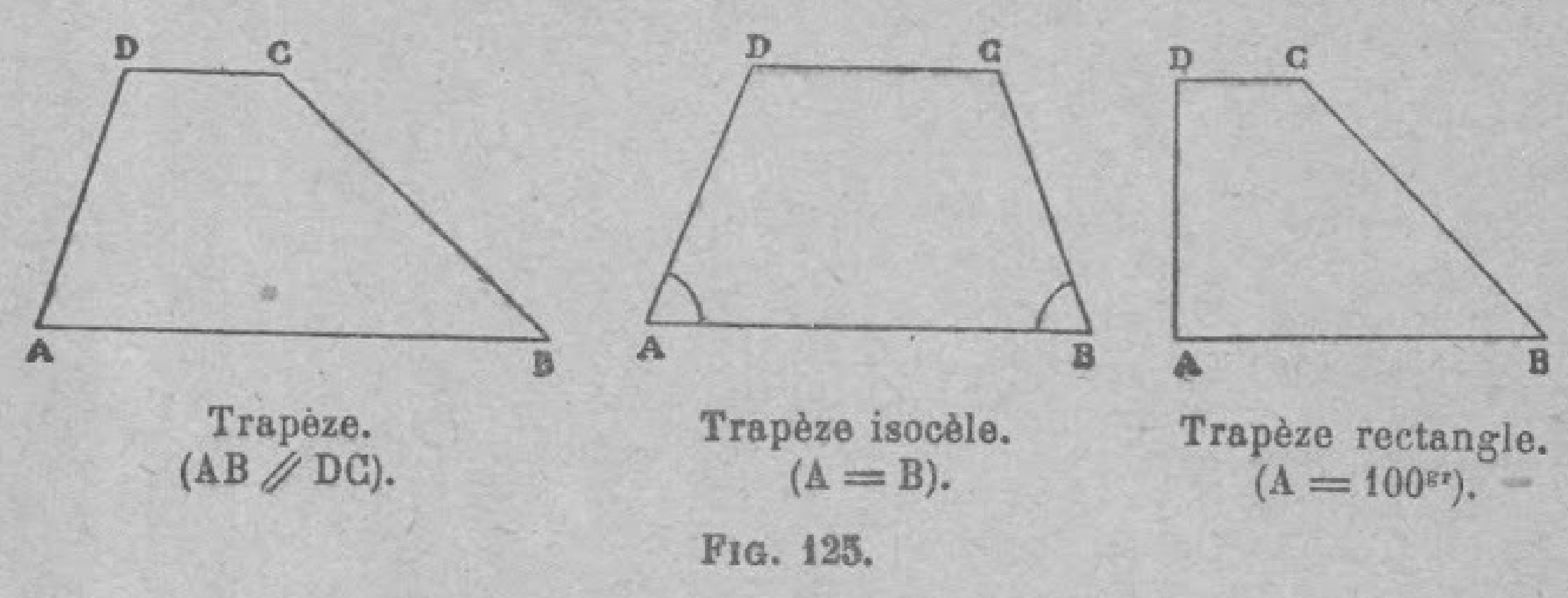
245. Définition. — On appelle **trapèze** un quadrilatère convexe ayant 2 côtés parallèles.

Les côtés parallèles s'appellent **bases**.

Les angles d'un trapèze sont **deux à deux supplémentaires.**

Inversement, montrer qu'un quadrilatère qui a deux angles *consécutifs* supplémentaires est un trapèze.

On dit qu'un trapèze est **isocèle** si les côtés non parallèles forment avec



Trapèze. (AB ∥ DC). Trapèze isocèle. (A = B). Trapèze rectangle. (A = 100^{gr}).

FIG. 125.

une base des angles égaux. Les côtés obliques (c'est-à-dire autres que les bases) sont alors égaux.

On appelle **trapèze rectangle** un trapèze qui a un angle droit (et par suite deux).

246. Vérification. — Vérifier que le segment qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est égal à la demi-somme des bases.

Exercices.

247. — Quelle est la figure obtenue en prolongeant jusqu'à leur point de rencontre les côtés non parallèles d'un trapèze isocèle?

248. — Dans un trapèze isocèle ABCD, la petite base CD est égale aux côtés non parallèles AD et BC. Montrer que la diagonale AC, par exemple, est bissectrice de l'angle A du trapèze.

249. — Même énoncé. On suppose en outre que la grande base est

égale aux diagonales. Montrer que l'angle A, par exemple, est les $\frac{2}{3}$ de l'angle D. Évaluer les angles du trapèze.

250. — Même énoncé que 248. On suppose en outre que les diagonales sont perpendiculaires aux côtés non parallèles. Évaluer les angles du trapèze.

§ 5. — PARALLÉLOGRAMME

251. Définition. — On appelle parallélogramme un quadrilatère qui a ses côtés parallèles deux à deux.

252. Propriétés. — *Si un quadrilatère est un parallélogramme,*

1° *Ses angles opposés sont égaux deux à deux, et ses angles consécutifs sont supplémentaires ;*

2° *Ses côtés opposés sont égaux deux à deux ;*

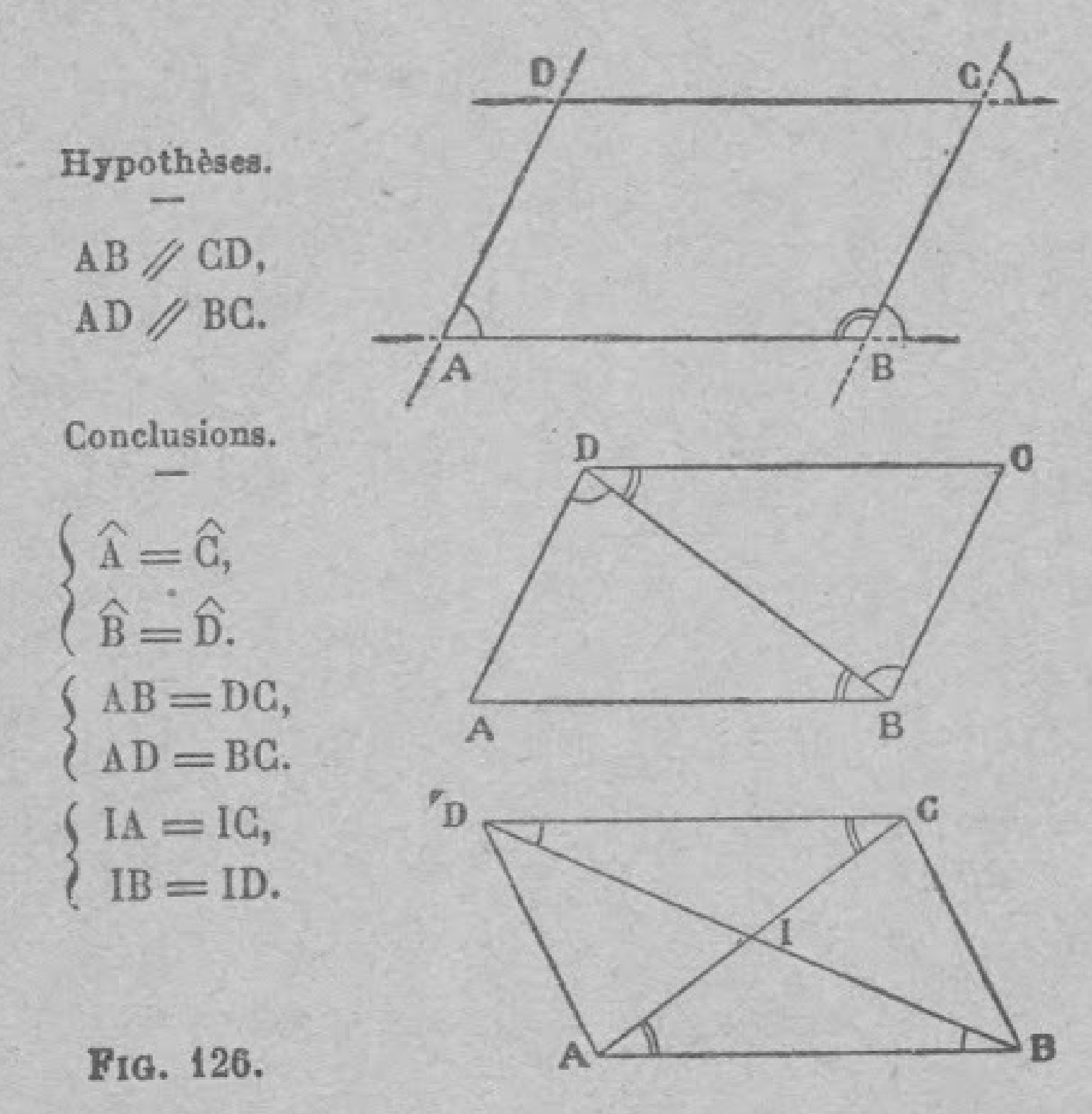


FIG. 126.

3° *Le point de rencontre des diagonales est le milieu de chacun d'elles.*

Démonstration. — 1° Angles à côtés parallèles.
2° Égalité des triangles ABD et CBD (1er cas).
3° Égalité des triangles IAB et ICD (1er cas).

253. — A quoi reconnaître qu'un quadrilatère est un parallélogramme.

I. Si un quadrilatère convexe a ses côtés parallèles deux à deux, c'est un parallélogramme (ceci n'est autre que la définition).

II. *Si un quadrilatère convexe a ses angles opposés égaux deux à deux, c'est un parallélogramme.*

La somme des angles d'un quadrilatère convexe est égale à 4 droits.

Hyp. $\begin{cases} \hat{A} = \hat{C}, \\ \hat{B} = \hat{D}. \end{cases}$ Concl. $\begin{cases} AB \,/\!/\, CD, \\ AD \,/\!/\, BC. \end{cases}$

FIG. 127.

Ces angles étant ici égaux deux à deux, $A + B = 2^D$. Donc les droites AD et BC sont parallèles. On démontre de même que AB et DC sont parallèles.

III. *Si un quadrilatère convexe a ses côtés opposés deux à deux égaux, c'est un parallélogramme.*

Égalité des triangles BAC et DAC (3e cas). On en déduit qu'il y a

Hyp. $\begin{cases} AB = CD, \\ AD = BC. \end{cases}$ Concl. $\begin{cases} AB \,/\!/\, CD, \\ AD \,/\!/\, BC. \end{cases}$

FIG. 128.

des angles alternes-internes égaux et par suite des droites parallèles.

IV. *Si un quadrilatère convexe a 2 côtés à la fois égaux et parallèles, c'est un parallélogramme.*

Hyp. $\begin{cases} AB = CD, \\ AB \,/\!/\, CD. \end{cases}$ Concl. : $AD \,/\!/\, BC$.

FIG. 129.

Dire que AB et CD sont parallèles équivaut à dire que les angles

B_1 et D_1 sont égaux. Les triangles ABD et CDB sont égaux (2e cas) d'où l'égalité des angles alternes-internes B_2 et D_2. Donc BC et AD sont parallèles.

V. *Si le point de rencontre des diagonales d'un quadrilatère est au milieu de chacune d'elles, ce quadrilatère est un parallélogramme.*

Égalité des triangles IAD, IBC (2e cas). On en déduit qu'il y a des

Hyp. $\begin{cases} IA = IC, \\ IB = ID. \end{cases}$ Concl. $\begin{cases} AB \,/\!/\, CD, \\ AD \,/\!/\, BC. \end{cases}$

FIG. 130.

angles alternes-internes égaux A_1 et C_1, et par suite des côtés parallèles AD et BC.

On démontre de même le parallélisme de AB et CD.

254. Application. — Par chacun des sommets d'un triangle ABC, on

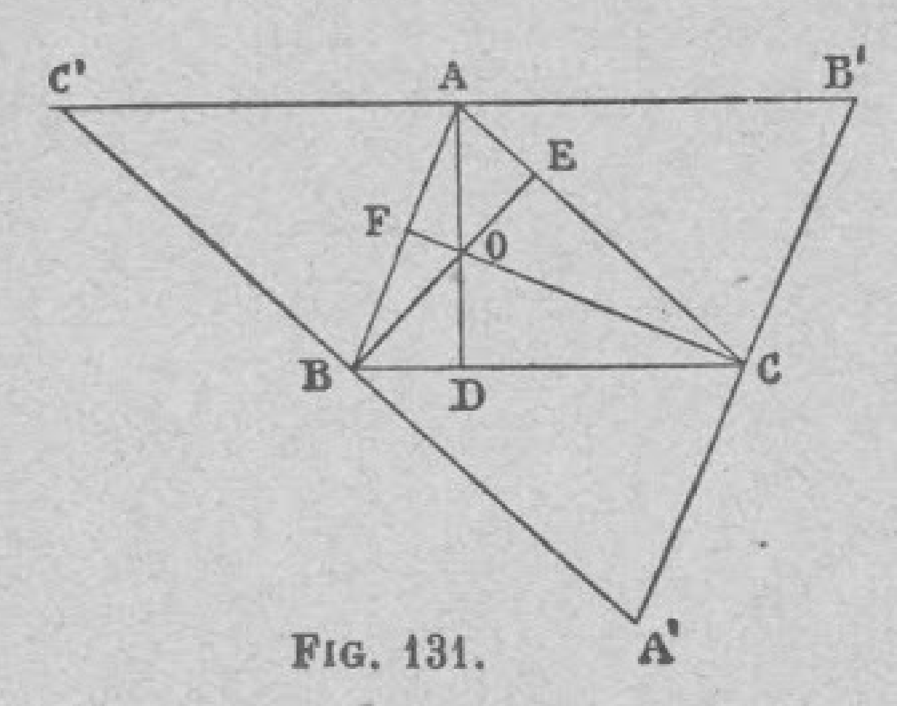


FIG. 131.

mène la parallèle au côté opposé; on forme ainsi un triangle A'B'C'. On a BC = AC', BC = AB' comme côtés opposés d'un parallélogramme. Donc AB' = AC', et A est le **milieu** du côté B'C'.

La hauteur AD du triangle ABC étant perpendiculaire à BC, est aussi **perpendiculaire** à B'C'. C'est donc une médiatrice du triangle A'B'C'. Il en est de même pour les deux autres hauteurs.

Or les médiatrices du triangle A'B'C' sont concourantes. D'où le résultat :

Théorème. — *Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

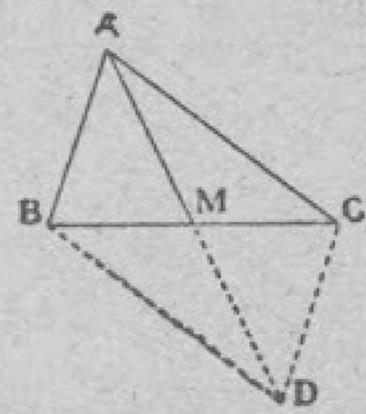


FIG. 132.

Exercices. 255. — On prolonge une médiane AM d'un triangle d'une longueur MD égale à elle-même; on trace BD et DC. Montrer que ABDC est un parallélogramme.

256. — Si une droite joint les milieux MN de deux côtés opposés d'un

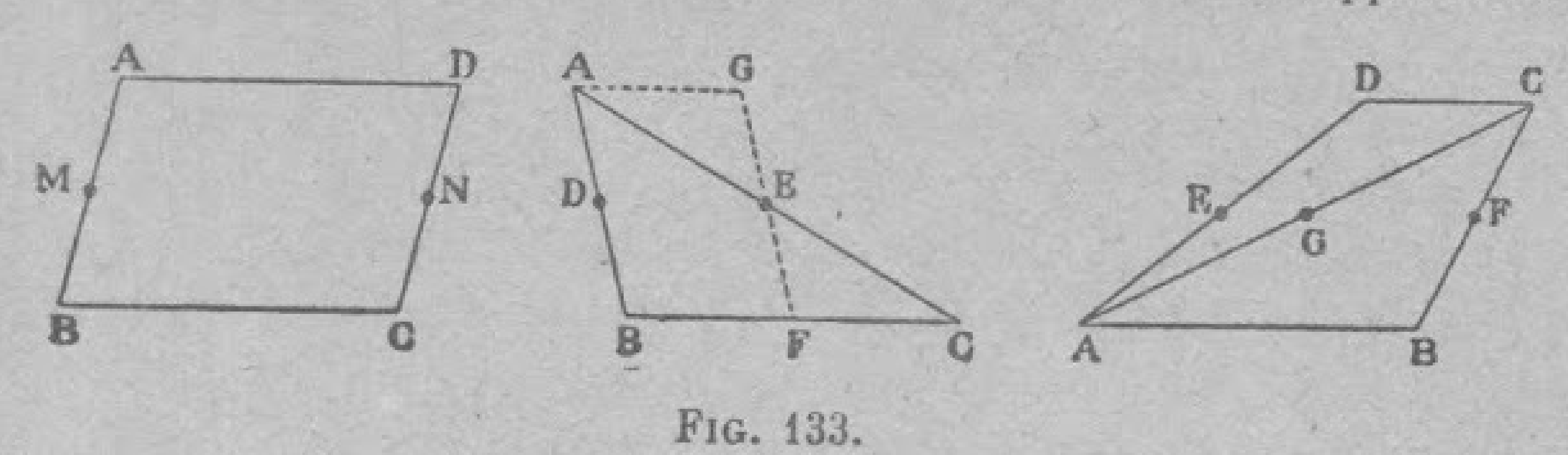


Fig. 133.

parallélogramme, elle est parallèle aux deux autres côtés. A quoi est égal le segment MN?

257. — Soit D et E les milieux de 2 côtés d'un triangle ABC. On mène AG parallèle à BC et FEG parallèle à AB. Montrer que E est le milieu de FG (chercher 2 triangles égaux) et que F est le milieu de BC. En déduire, en utilisant l'exercice précédent, que : *Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et égal à la moitié de ce troisième côté.*

258. — Soit un trapèze ABCD; AC une diagonale. Appliquer le résultat de l'exercice précédent aux triangles ACD et ACB. En déduire que les milieux E, G, F, de AD, AC, BC, sont sur une même droite et que : *Le segment qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases et égal à la demi-somme de ces bases.*

259. — Étant donné un angle xAy d'un parallélogramme et un point I intérieur à cet angle, construire le parallélogramme sachant que ses diagonales se coupent en I.

260. — Étant donné un angle xAy et un point intérieur I, mener par I une droite rencontrant les côtés de l'angle en B et C, et telle que I soit le milieu de BC. (Voir l'exercice précédent.)

Constructions (sans rapporteur, ni équerre).
Construire un parallélogramme connaissant :

261. — 2 côtés consécutifs, 45^{mm} et 82^{mm}, et leur angle, $\frac{2^D}{3}$;

262. — Un côté, 85^{mm}, et les deux diagonales, 126^{mm} et 142^{mm};

263. — Les diagonales, 118^{mm} et 86^{mm}, et leur angle, 50^{gr};

264. — Deux côtés, 53^{mm} et 68^{mm} et une diagonale, 95^{mm}.

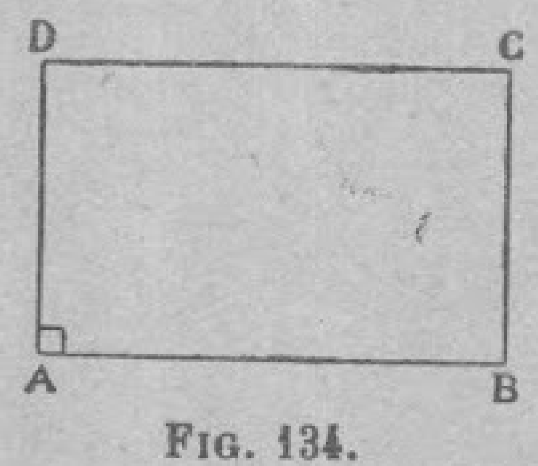


Fig. 134.

§ 6. — RECTANGLE

265. Définition. — On appelle **rectangle** un parallélogramme qui a un angle droit.

Il en résulte que les trois autres angles sont droits.

Inversement, si un quadrilatère a 3 angles droits, c'est un rectangle (construire un tel quadrilatère).

266. Propriétés. — Le rectangle possède toutes les propriétés du parallélogramme. De plus il possède la propriété caractéristique suivante :

Théorème. — *Si un parallélogramme est un rectangle, ses diagonales sont égales.*

267. Théorème réciproque. — *Si un parallélogramme a ses diagonales égales, c'est un rectangle.*

Fig. 135.

Pour chacun de ces théorèmes on démontrera que les triangles ABC et ABD sont égaux. Dans chaque cas : AD = BC et AB est commun; l'hypothèse particulière fournira une 3e égalité.

268. Remarque. — Un rectangle possède 2 axes de symétrie : les perpendiculaires aux côtés menées par le point de rencontre des diagonales. (Faire la figure.)

269. Distance de 2 droites parallèles. — Les portions AC, BD de perpendiculaires communes à 2 parallèles sont égales

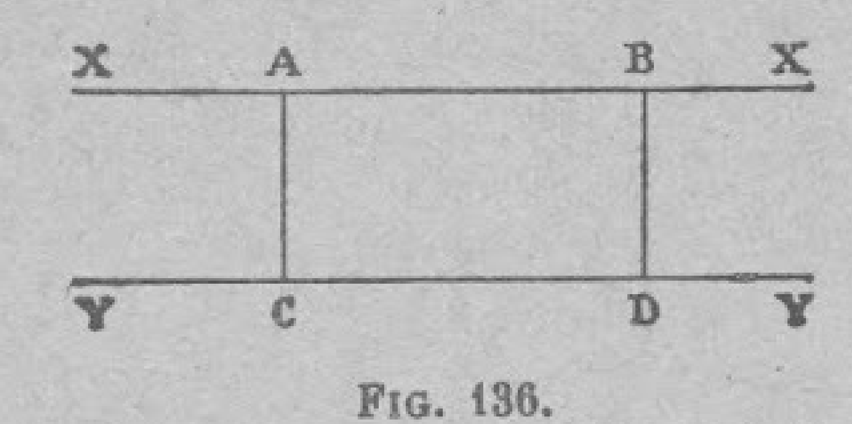


Fig. 136.

(côtés opposés d'un rectangle), ce qui conduit à la définition suivante : On appelle *distance de deux droites parallèles* la longueur d'une perpendiculaire commune à ces deux droites.

270. Application au trapèze. — On appelle **hauteur** d'un trapèze la distance des deux bases.

Propriété caractéristique du triangle rectangle.

271. Théorème. — *Dans un triangle rectangle, la médiane relative à l'hypoténuse est égale à la moitié de l'hypoténuse.*

272. Théorème réciproque. — *Si une médiane d'un triangle est égale à la moitié du côté correspondant, ce triangle est rectangle.*

En effet, soit ABC un triangle **quelconque**. Prolongeons la médiane AO d'une longueur OD égale à elle-même et joignons BD, CD. Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Il revient au même de dire que c'est un rectangle, ou que les diagonales BC et AD sont égales. Si donc $\widehat{A}$ est droit, OA, demi-diagonale, est égal à la moitié de BC (th. direct). Et si OA est égal à la moitié de BC, AD = BC, le parallélogramme est un rectangle et l'angle A est droit (th. réciproque).

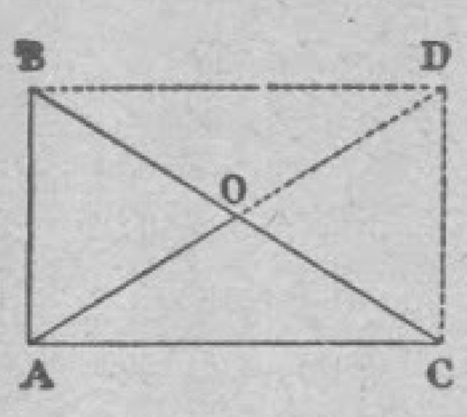


Fig. 137.

273. Autre forme de ces propriétés. — Dans un rectangle OA = OB = OC = OD.

Donc *il existe un cercle passant par les 4 sommets d'un rectangle* (**cercle circonscrit**); son centre est le point de rencontre des diagonales.

De même, pour qu'un triangle soit rectangle, *il faut* que l'on ait OA = OB = OC (O étant le milieu de BC) et inversement cette double égalité suffit pour que le triangle soit rectangle.

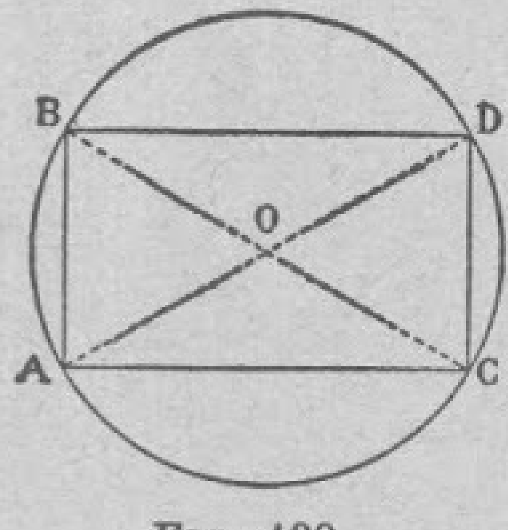


Fig. 138.

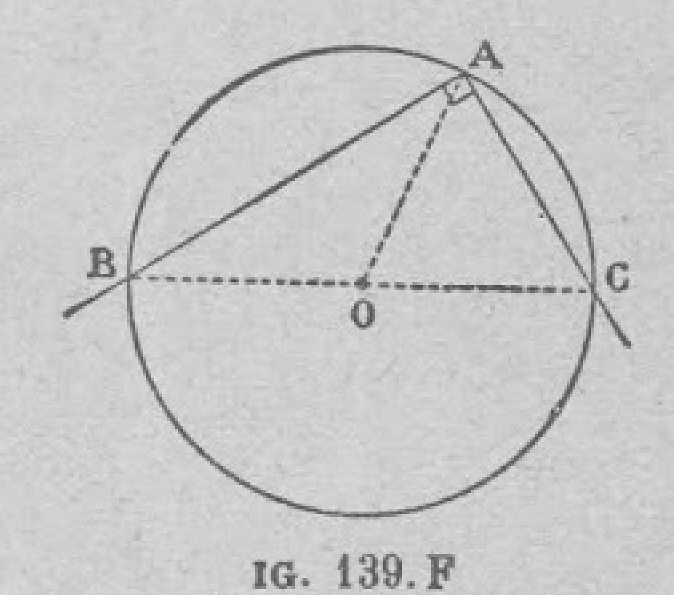


Fig. 139.

Le cercle de centre O et de rayon OB passera par les 3 sommets : le cercle circonscrit à un triangle rectangle a l'hypoténuse pour diamètre.

Inversement, en joignant un point A d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, on forme un angle droit. — En résumé :

274. Théorème. — *Le lieu géométrique des sommets des angles droits dont les côtés passent par deux points fixes* B *et* C, *est le cercle de diamètre* BC.

Construction. 275. — *Mener la perpendiculaire en un point A d'une droite.*

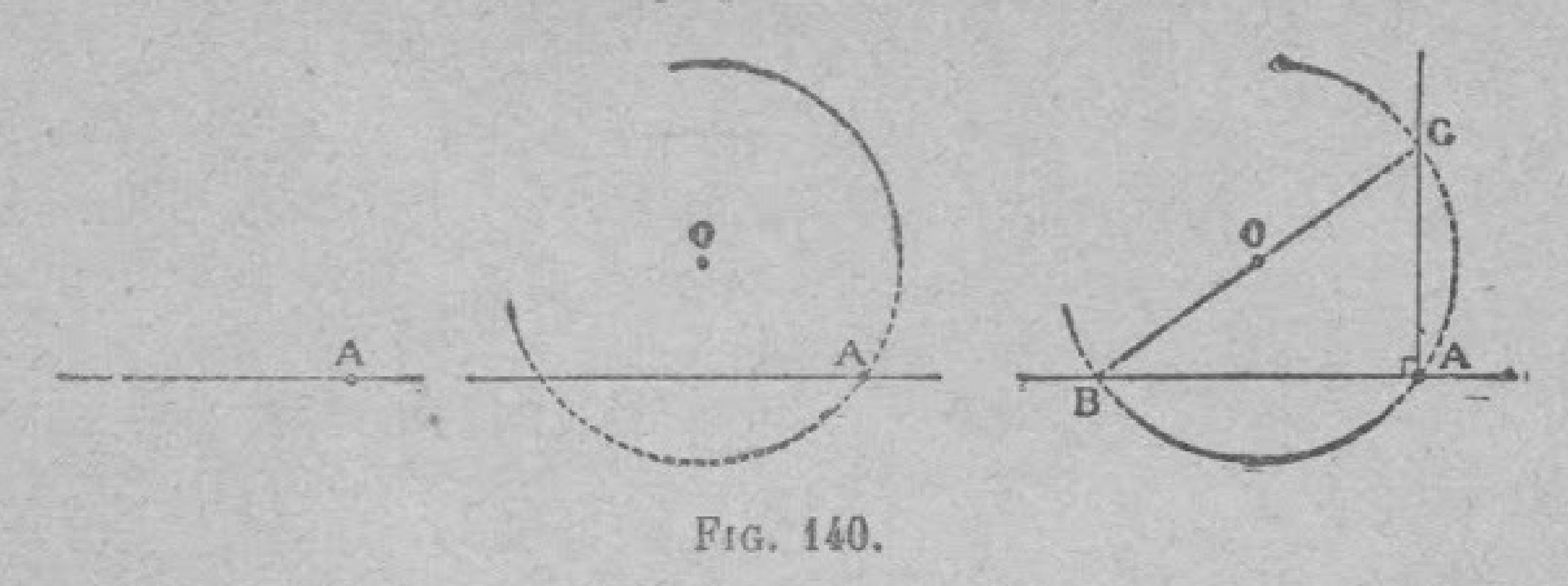


Fig. 140.

Justification : En joignant un point A du cercle aux extrémités B et C d'un diamètre on forme un angle droit.

Exercices.

276. — On donne trois points quelconques A, B, C. Mener par le point A une droite qui soit à égale distance des points B et C, en supposant :

1° que B et C sont de part et d'autre de la droite ;

2° que B et C sont d'un même côté de la droite.

277. — Les extrémités d'un segment AB de 12 cm glissent sur les côtés d'un angle droit. Marquer (bande de papier) quelques positions du milieu M en plaçant A successivement à 12, 11, 10, 8, 6, 4, 0 cm du point O.

1° Quelle est la ligne que décrit le point M?

2° Comment le démontrer? (Quelle sorte de triangle est OAB et que sont, pour ce triangle, les droites AB et OM?)

Fig. 141.

278. — Marquer plusieurs points à 3 cm d'une droite xy (On peut les placer d'un côté ou de l'autre). Que peut-on dire de l'ensemble des points qui sont à 3 cm d'une droite donnée?

279. — Construire un triangle ABC connaissant (unité : cm) le côté BC = 8, le rayon R = 5 du cercle circonscrit, et la hauteur AH = 7. (Tracer d'abord le cercle, et placer le côté.)

280. — Soit un triangle ABC rectangle en A (AC > AB).

Comparer aux angles B et C les angles que forment AB et AC avec la hauteur AH ; avec la médiane AO.

En déduire que l'angle HAO : 1° est égal à la différence des angles B et C ; 2° a les mêmes bissectrices que l'angle BAC.

§ 7. — LOSANGE

281. Définitions. — On appelle **losange** un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs égaux. Il en résulte que tous les côtés sont égaux.

Inversement un quadrilatère qui a ses 4 côtés égaux est forcément convexe et c'est un losange

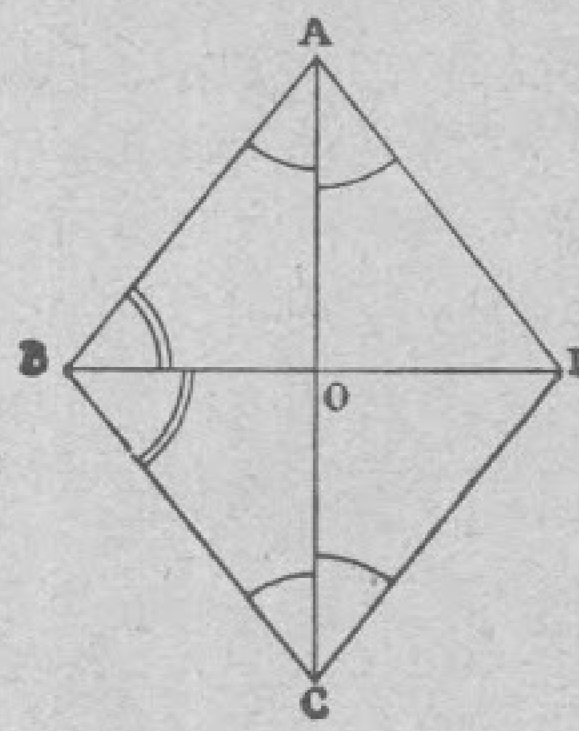


FIG. 142.

282. Propriétés. — Le losange possède toutes les propriétés du parallélogramme. De plus il possède la propriété caractéristique suivante :

283. Théorème. — *Si un parallélogramme est un losange, ses diagonales sont perpendiculaires l'une sur l'autre.*

284. Théorème réciproque. — *Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, c'est un losange.*

Puisqu'il s'agit d'un parallélogramme OA = OC et OB = OD.

Théorème direct : ADC est isocèle; OD est médiane, donc elle est aussi hauteur.

Th. réciproque : AB = AD comme obliques s'écartant également du pied de la perpendiculaire.

FIG. 143.

285. REMARQUE. — Le losange admet 2 axes de symétrie : les diagonales.

Manipulations.

286. Pliage. — D'un losange faire un rectangle (enveloppe de lettre).

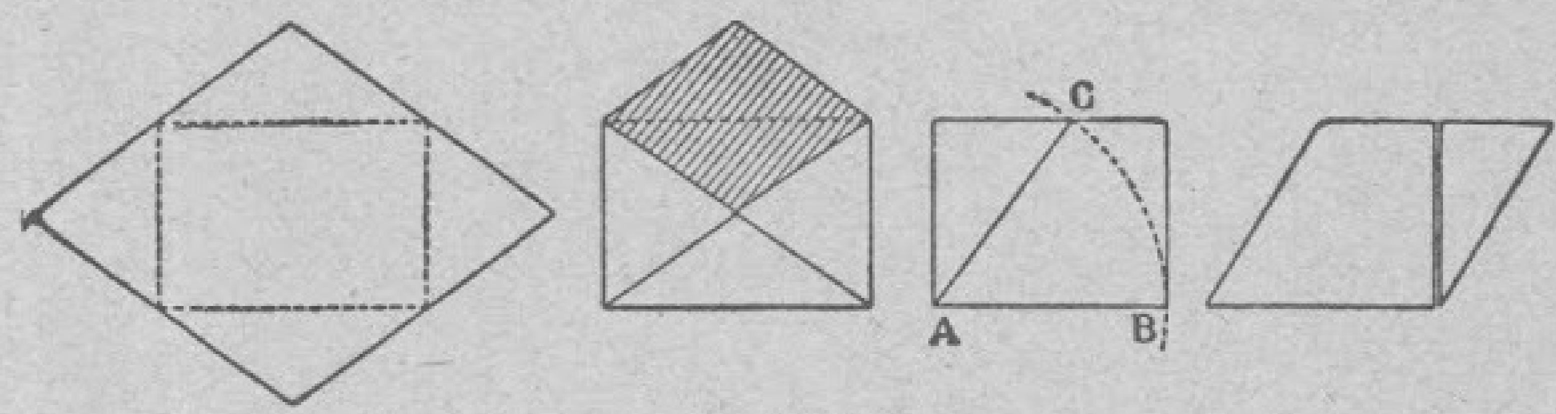


FIG. 144.

287. Découpage. — D'un rectangle faire un losange (AB étant le plus grand côté, tracer de A comme centre, l'arc BC et couper suivant la droite AC).

§ 8. — CARRÉ

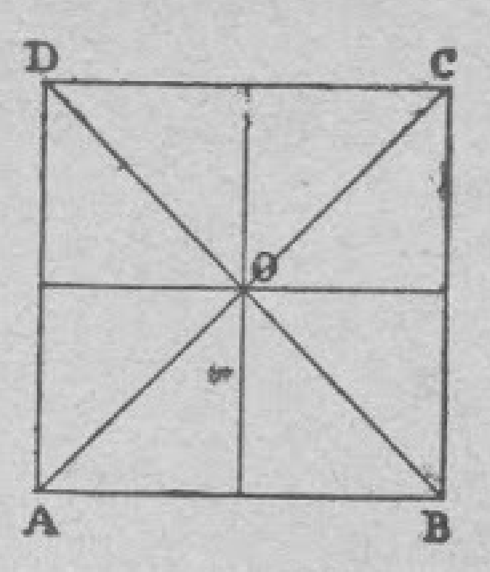


FIG. 145.

288. Définitions. — On appelle **carré** un rectangle qui a 2 côtés consécutifs égaux, ou bien un losange qui a un angle droit. C'est donc un quadrilatère dont tous les côtés sont égaux et dont les angles sont droits.

Il possède toutes les propriétés du parallélogramme, du rectangle, du losange.

289. — EXEMPLE.

Les diagonales d'un carré *se coupent en leurs milieux* ;
sont égales ;
sont perpendiculaires l'une sur l'autre.

290. REMARQUE. — Un carré possède quatre axes de symétrie.

Exercices.

291. — Construire un carré connaissant sa diagonale.

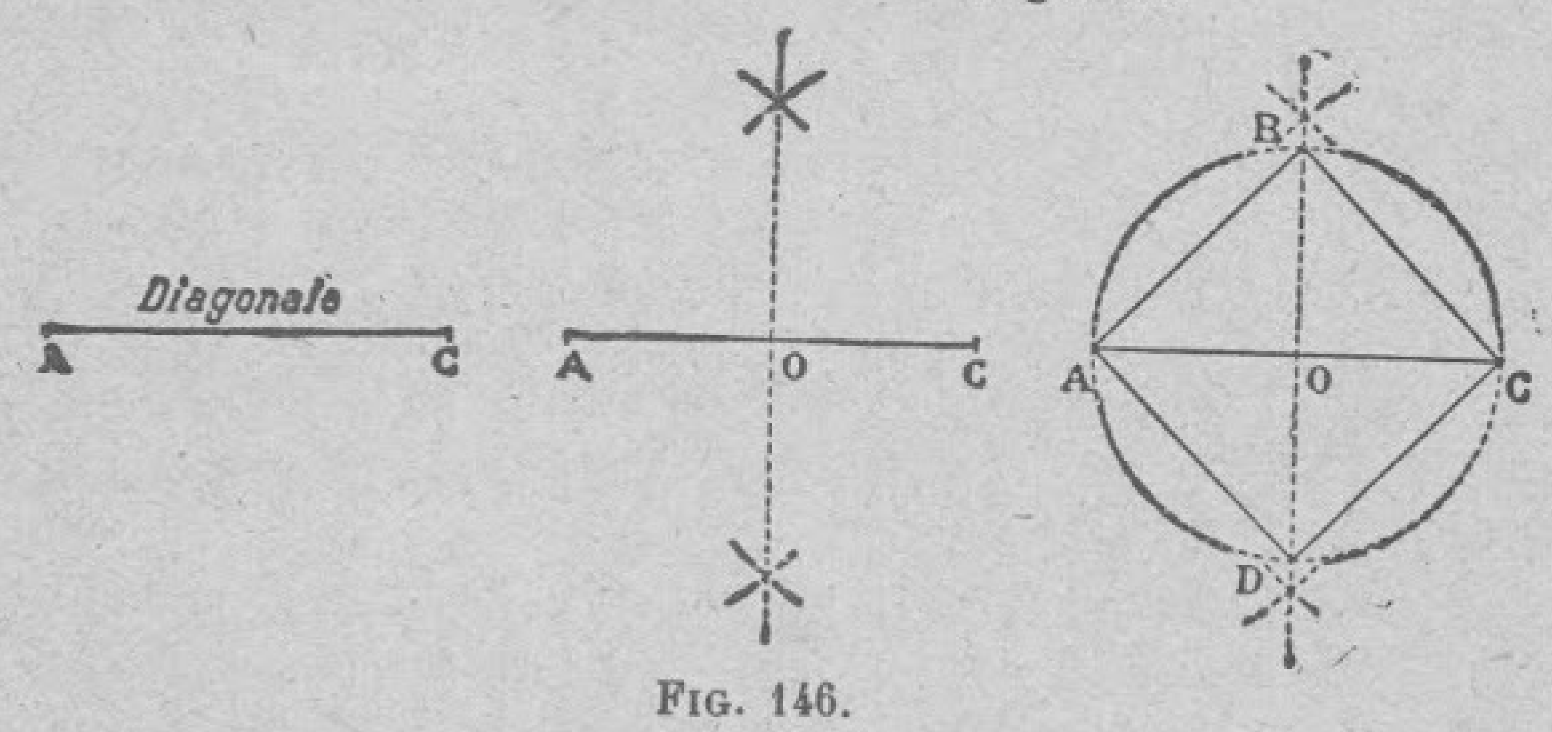


FIG. 146.

292. — Construire un carré connaissant son côté.
Une seule ouverture de compas. Centre : A, B, I, D.

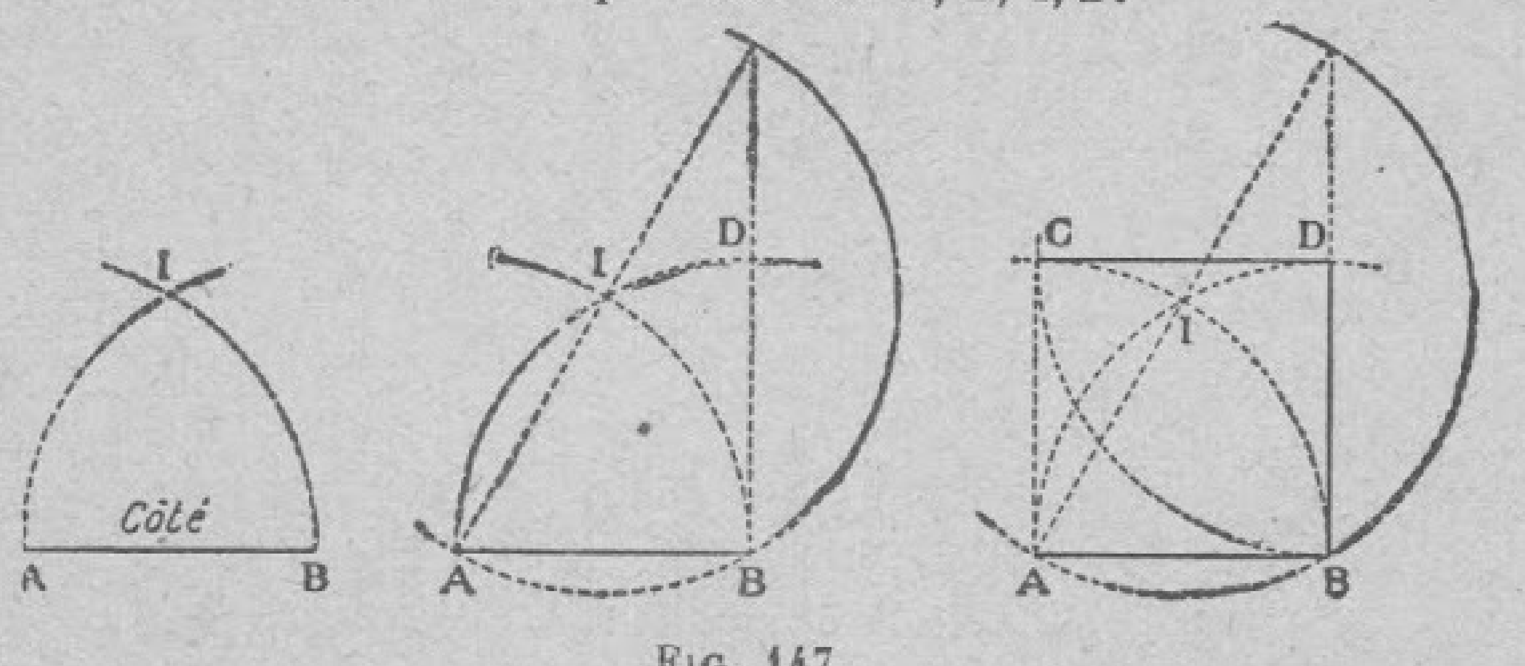


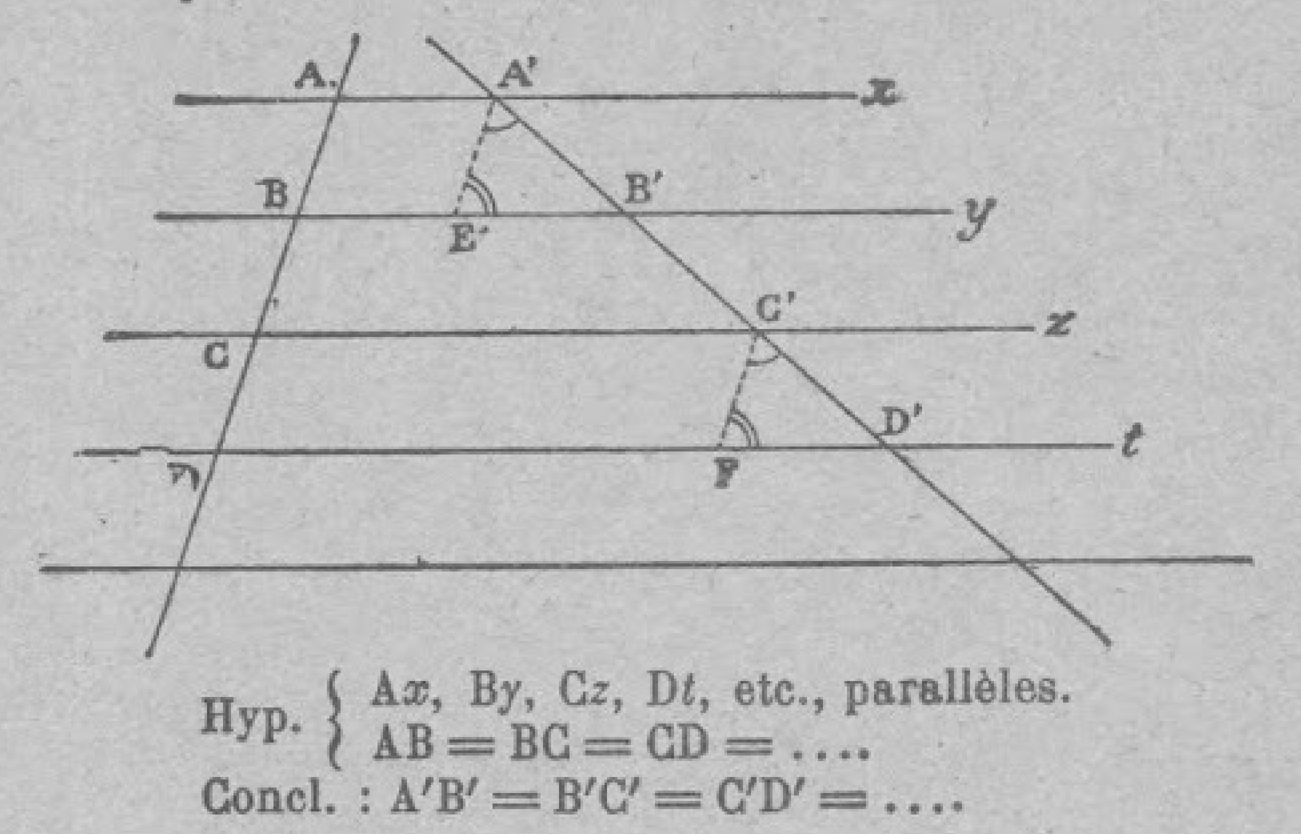
FIG. 147.

293. — Soit un carré ABCD; on porte sur les côtés AB, BC,..., dans le même sens de parcours, des segments égaux AE, BF, CG, DH. Montrer que E, F, G, H sont les sommets d'un carré.

§ 9. — FAMILLE DE PARALLÈLES ÉQUIDISTANTES

294. Théorème. — *Si des parallèles déterminent sur une première sécante des segments égaux, elles déterminent sur toute autre sécante des segments égaux.*

Démontrons par exemple que A'B' = C'D'. Par les points A' et C' menons les parallèles à la 1re sécante AD. On forme ainsi deux



Hyp. { Ax, By, Cz, Dt, etc., parallèles. AB = BC = CD = ...
Concl. : A'B' = B'C' = C'D' = ...

Fig. 148.

triangles A'EB', C'FD' qui sont égaux (1er cas) comme ayant : A'E = AB = CD = C'F et les angles adjacents égaux chacun à chacun (En donner la raison). Les côtés A'B' et C'D', opposés aux angles égaux E et F, sont donc égaux.

Fig. 149.

295. Conséquence. — Les parallèles en question sont *équidistantes* : on le voit en les coupant par une sécante perpendiculaire.

Exemple. — La réglure d'un cahier.

296. Remarque. — Le théorème est vrai pour tous les cas de figure, c'est-à-dire quelles que soient les positions relatives des deux sécantes.

Il est encore vrai quand les segments égaux ne sont pas consécutifs.

Hypothèse : AB = CD.

Conclusion : A'B' = C'D'.

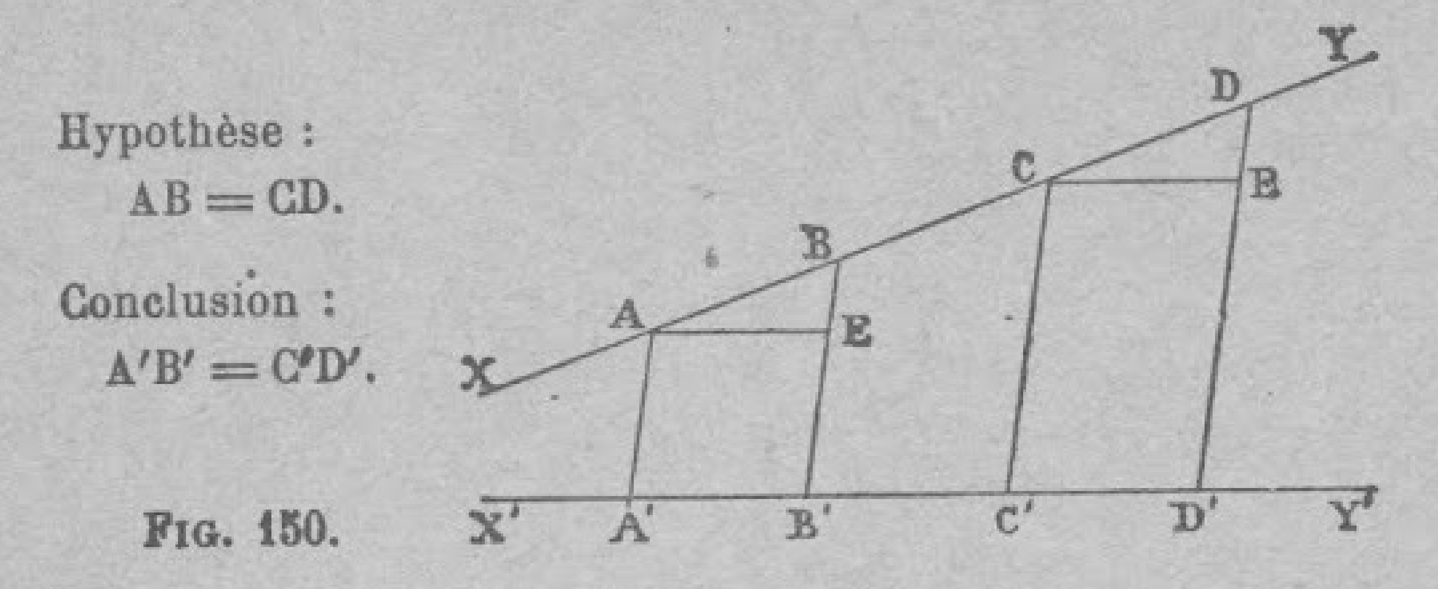


Fig. 150.

Applications et Exercices.

297. — *Partager un segment* AB *en parties égales*, par exemple en 5.

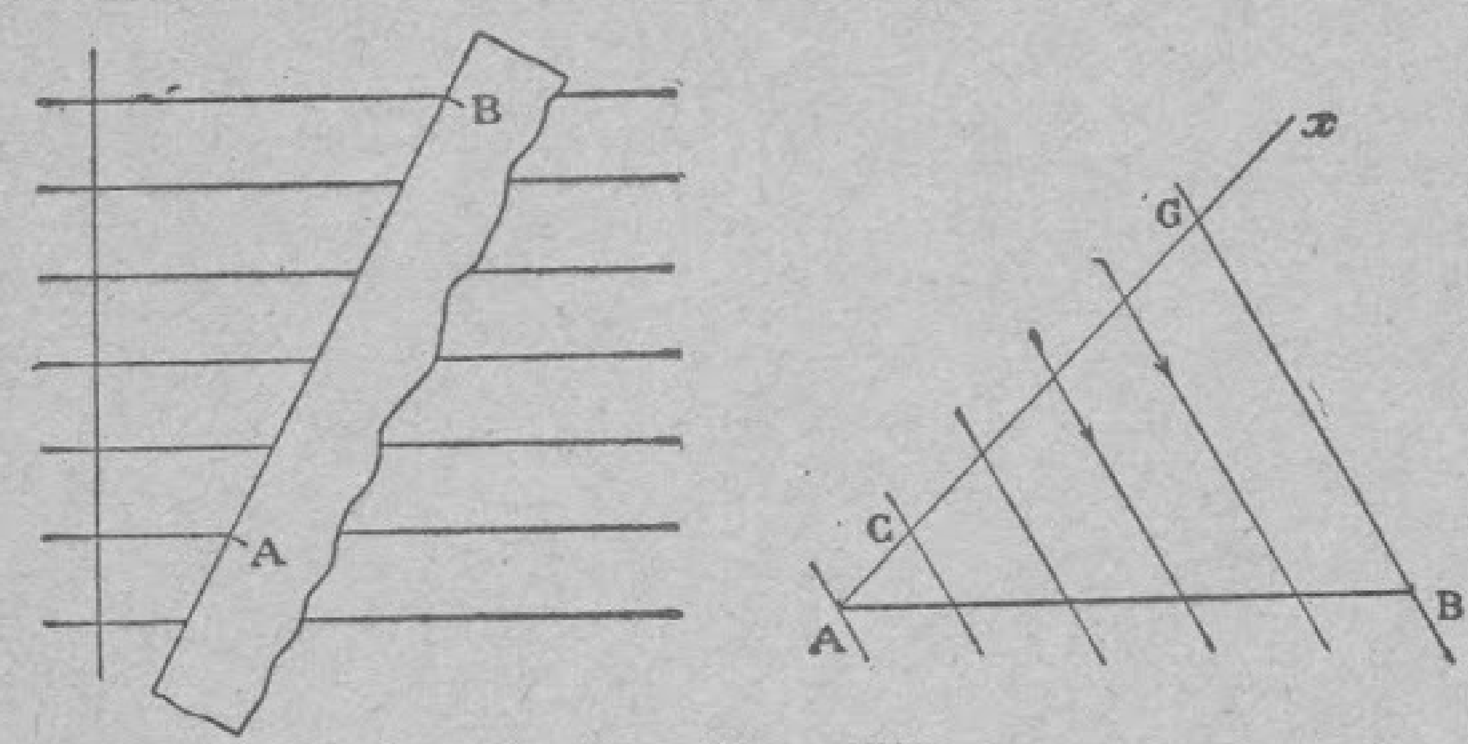


Fig. 151 et 152.

1° Au moyen d'une bande de papier et de la réglure du cahier.

2° Par une construction. Sur une demi-droite auxiliaire Ax, on porte 5 fois bout à bout un segment arbitraire AC; on joint l'extrémité G au point B et par les points de division on mène les parallèles à GB.

298. Triangle. — Soit un triangle ABC, D le milieu de AB. Prenons comme parallèles : BC, la parallèle Ax issue de A et la parallèle Dy issue de D. Prenons comme sécantes AB et AC. Puisque D est au milieu de AB, il en résulte que E *est au milieu de* AC.

Inversement, si on joint les milieux D, E, DE est parallèle à BC; de même, en appelant F le milieu de BC, EF est parallèle à AB; on forme ainsi un parallélogramme et on retrouve la propriété déjà démontrée au n° 257.

Fig. 153.

299. Théorème. — *Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au 3e côté et égal à sa moitié.*

300. Trapèze. — En menant par le milieu E de AD la parallèle aux bases on voit que F, G, H sont les milieux de BC, AC, BD.

Inversement la droite qui joint les milieux E, F des côtés non parallèles est parallèle aux bases; EH est la moitié de AB, FH la moitié de CD (triangles BAD et BCD); on retrouve ainsi la propriété démontrée au n° 258.

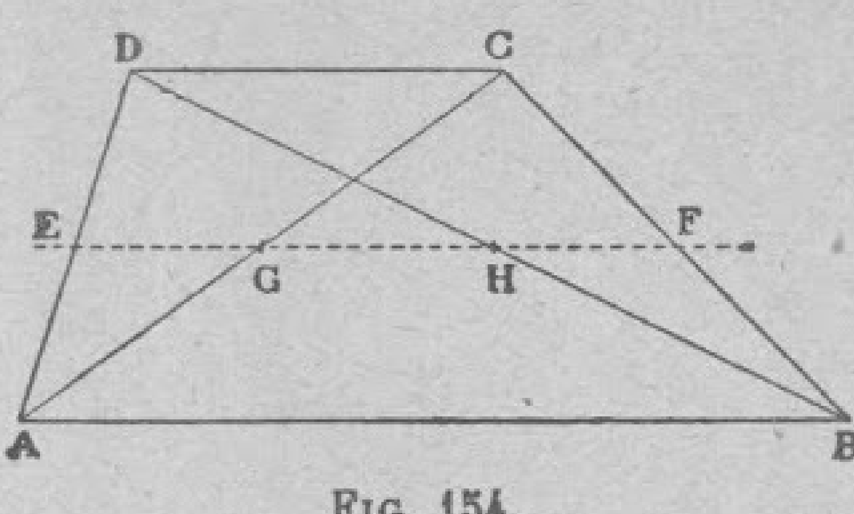


FIG. 154.

301. Théorème. — *Le segment qui joint les milieux des côtés non parallèles d'un trapèze est parallèle aux bases et égal à la demi-somme des bases.*

302. Médianes d'un triangle.

Divisons le côté AC en 4 parties égales par les points HEI; traçons BE (médiane) et menons-lui les parallèles Ax, HF, ID. Ces parallèles sont équidistantes.

Donc : 1° la sécante BC est coupée en deux parties égales; si on trace AD, on aura donc une médiane du triangle.

2° la sécante AD est coupée en trois parties égales. Donc AG est les $\frac{2}{3}$ de AD.

FIG. 155.

Une médiane AD est donc coupée par une autre, BE, aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur; la 3ᵉ médiane couperait, pour la même raison AD au même point G.

Ce qu'on dit de AD aurait pu être établi pour les autres médianes. Donc :

303. Théorème. — *Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point situé aux $\frac{2}{3}$ de chacune d'elles à partir des sommets.*

§ 10. — GLISSEMENT D'UNE FIGURE DANS SON PLAN

Une figure qui glisse dans son plan peut subir deux déplacements fondamentaux que nous allons étudier.

I. Translation.

304. Définition. — On appelle **translation** le mouvement d'une figure plane qui glisse sur un plan, *une droite de la figure mobile étant assujettie à glisser sur une droite du plan fixe.*

EXEMPLES. — Équerre sur règle.
Lettre dans enveloppe.
Portière de chemin de fer, porte d'une voiture du métro.

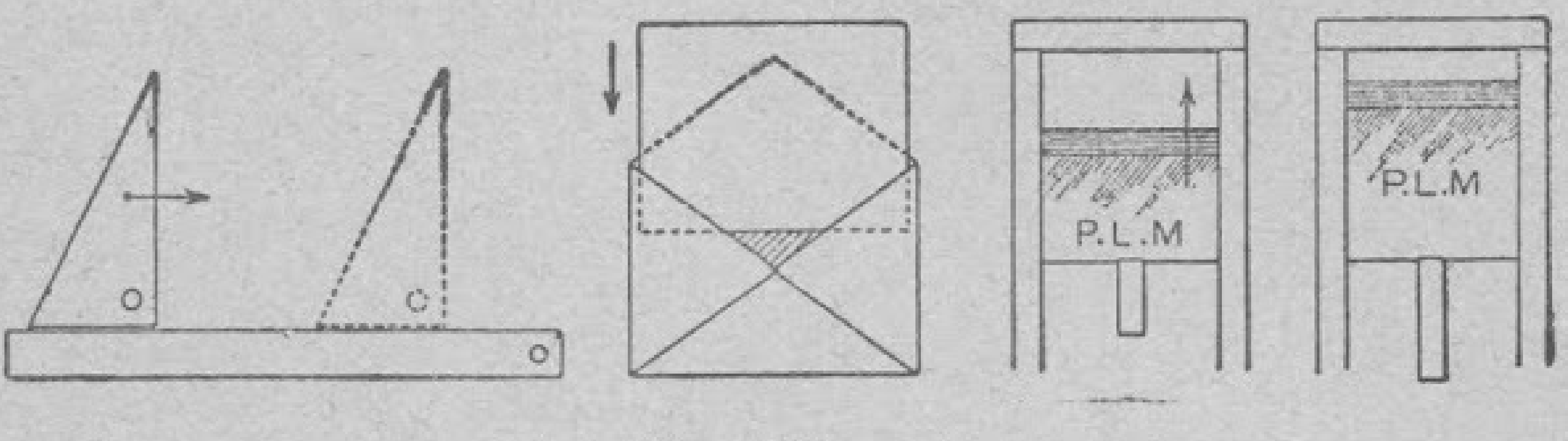


FIG. 156.

305. Exercices. — Tracer un polygone ABC... et une droite D. Calquer cette figure et faire glisser le calque de façon que les droites D (calque et cahier) glissent l'une sur l'autre. Soit A'B'C'... la deuxième position du polygone; la marquer sur le cahier; tracer AA', BB'.... On constate que AA', BB ,... sont égaux et parallèles. Donc :

Dans un mouvement de translation, tous les points décrivent des segments parallèles, égaux, de même sens.

306. Frise. — Imprimer à la figure ci-dessous des translations successives où le point A se déplace chaque fois sur Ax de 5ᶜᵐ vers la droite.

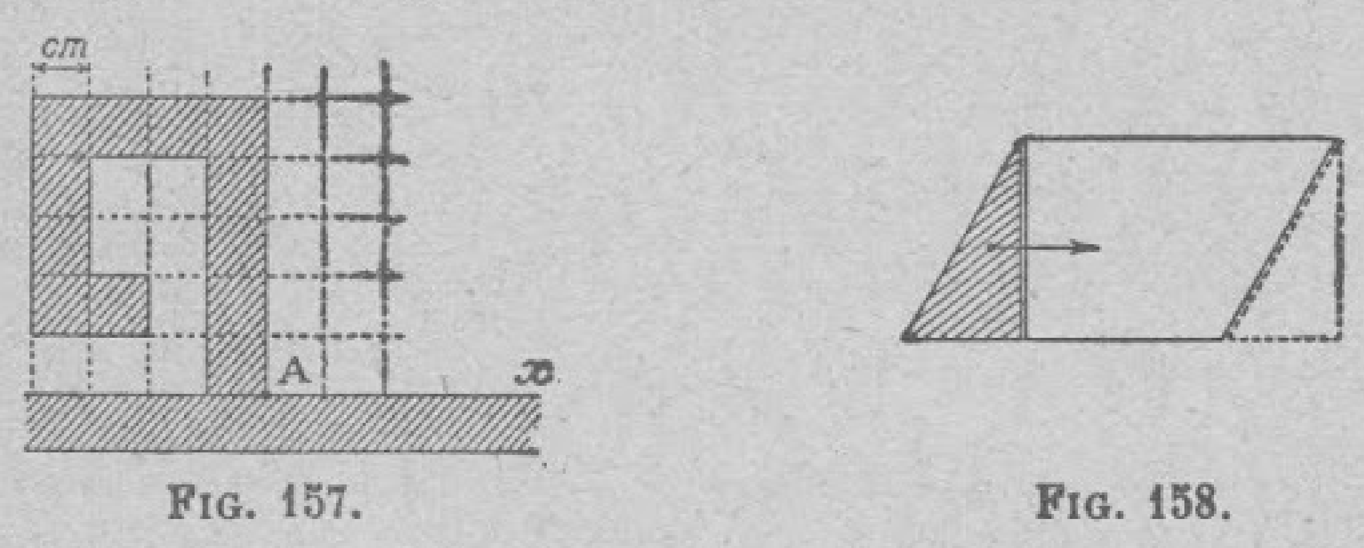


FIG. 157. FIG. 158.

307. Découpage et translation. — D'un parallélogramme faire un rectangle (fig. 158).

II. Rotation.

308. Définition. — On appelle **rotation** le mouvement d'une figure plane qui glisse sur un plan fixe de manière qu'*un point*, O, *de la figure reste fixe.*

Ce point O s'appelle **centre de rotation.**

Exercices. 309. — Réaliser une rotation avec un papier calque et une épingle de façon à posséder en même temps l'ancienne et la nouvelle positions de la figure. On constate que :

1° *Chaque point de la figure décrit un arc de cercle de centre* O;
2° *toutes les droites issues de* O *tournent du même angle dans le même sens.*

310. Rosace. — Imprimer à la figure ci-dessous (emploi **du calque**) des rotations successives de $\frac{2^D}{3}$ autour du point O.

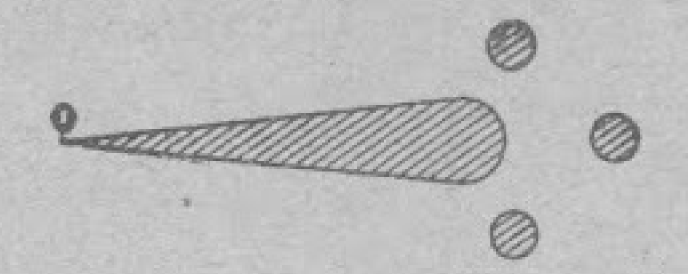


FIG. 159.

311. Découpages et Rotations. — D'un trapèze faire un rectangle;
d'un triangle faire un rectangle;
d'un trapèze faire un triangle.

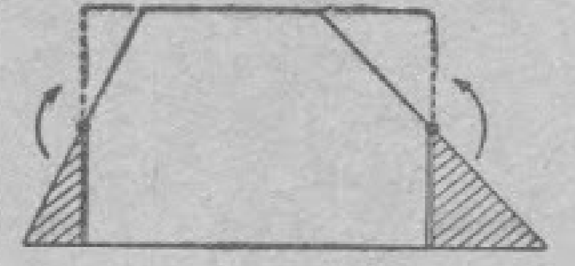
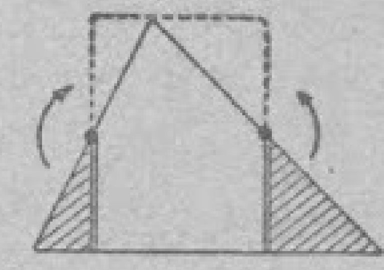
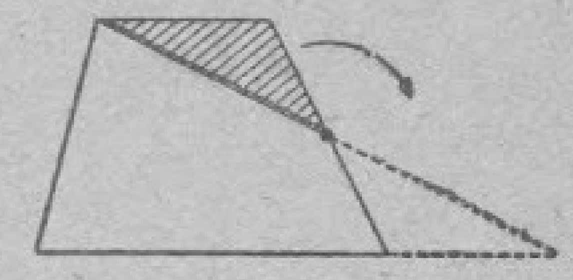




FIG. 160.

312. Cas particulier. — Symétrie par rapport à un point O.
C'est une rotation de 2^D autour du point O.

313. CONSÉQUENCE. — M *et* M' *étant deux points symétriques,* O *est le milieu du segment* MM'.

314. — EXEMPLES.



FIG. 161.

315. Figures possédant un centre de symétrie.
On dit qu'une figure possède un centre de symétrie O quand, calquant la figure et faisant tourner le calque de 2^D autour du point O, il coïncide avec la figure elle-même.



316. EXEMPLES.

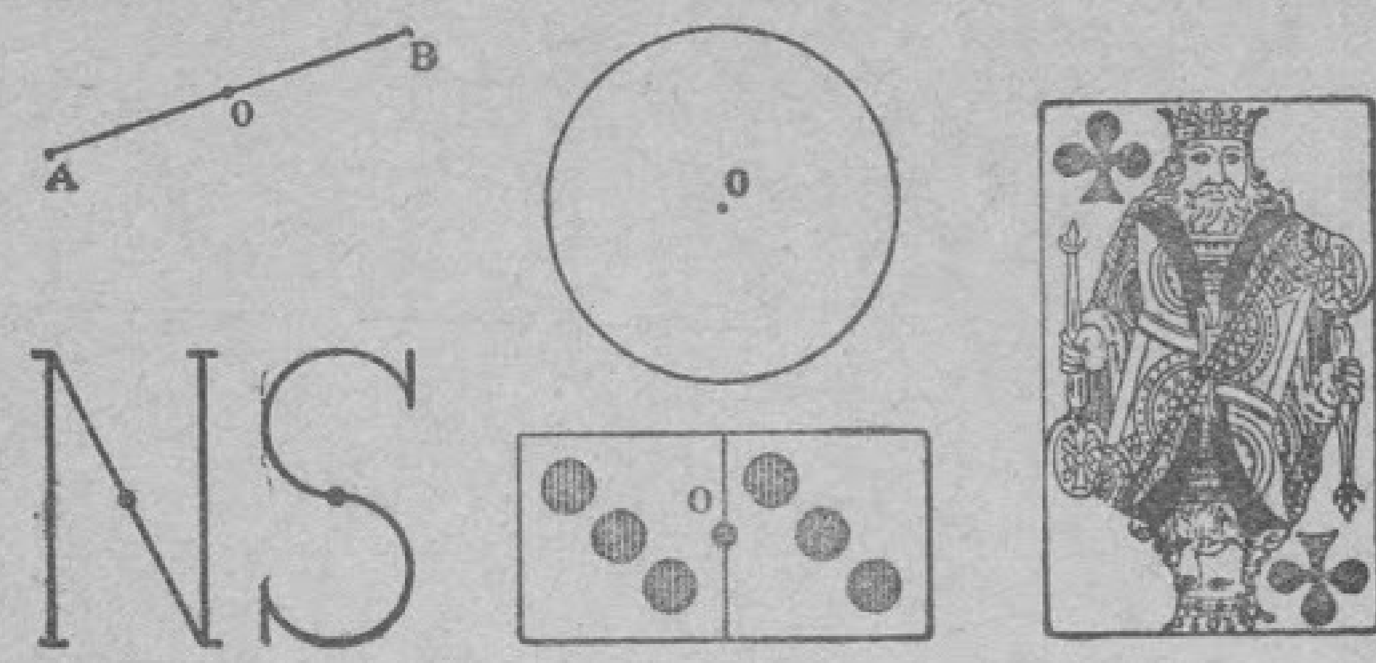


FIG. 162.

317. Exercices. — Construire le symétrique d'une figure F : 1° par rapport à un point O; 2° par rapport à un point O'. Vérifier que les **deux figures obtenues peuvent être amenées l'une sur l'autre par une translation.**

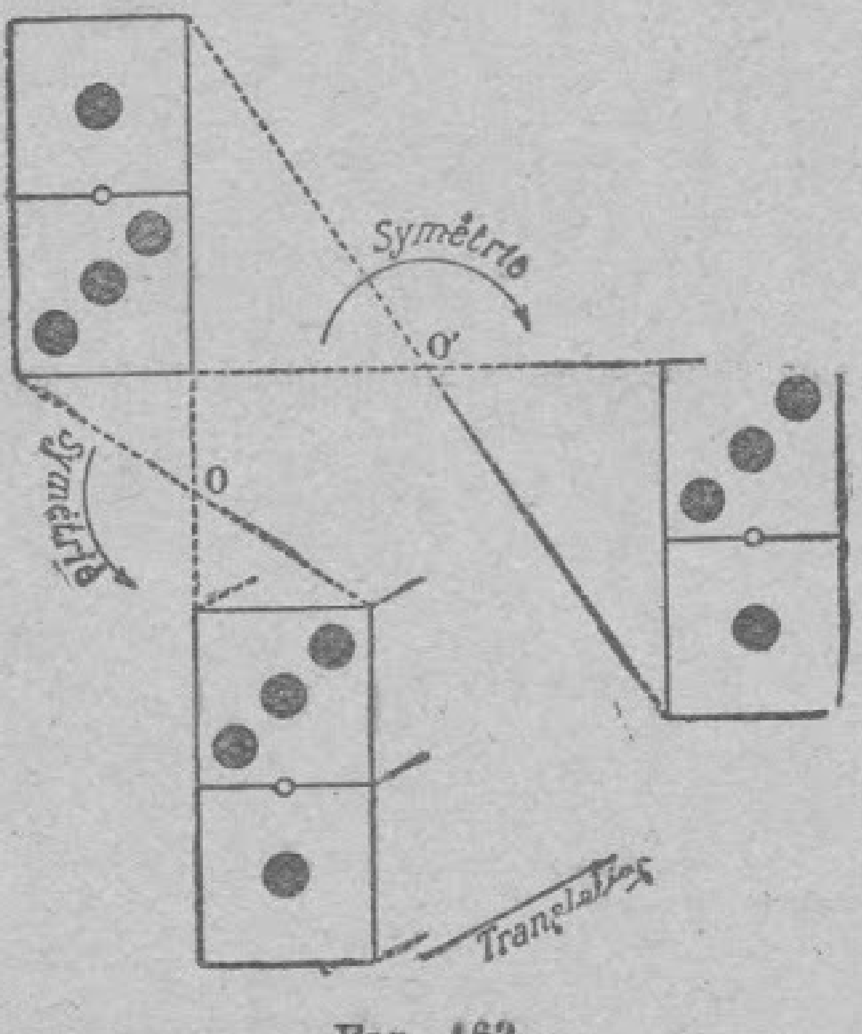


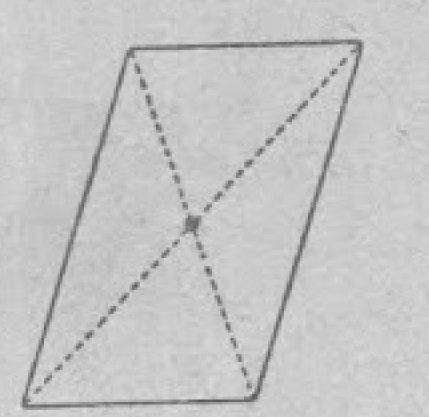
FIG. 163.

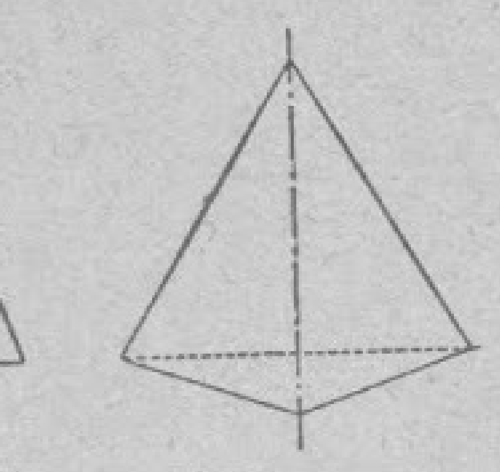
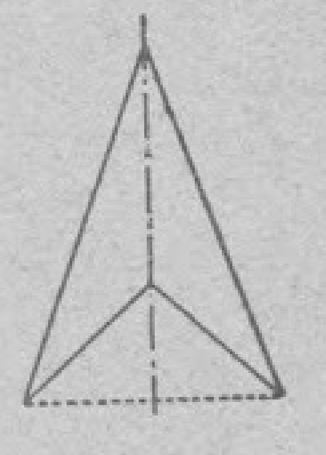
318. — Quadrilatères possédant des symétries (fig. 164).

Manipulations.

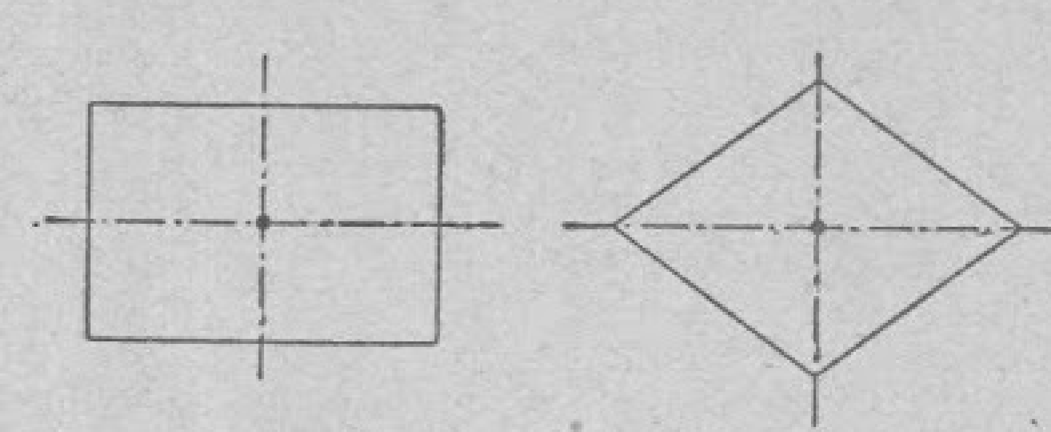
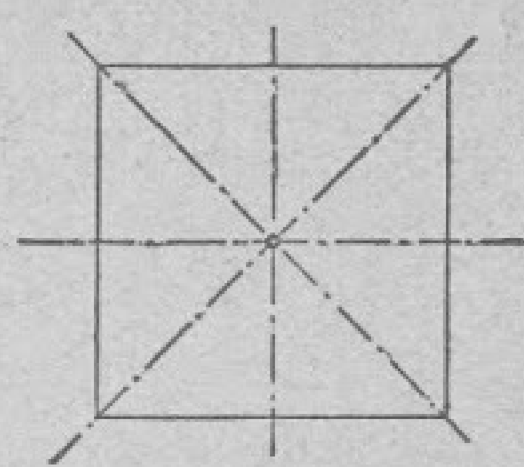
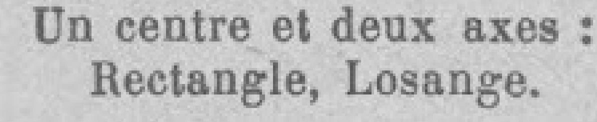
319. — Découper deux triangles égaux ayant un angle obtus. **Les assembler de façon à former :**

un parallélogramme (trois façons)
un cerf-volant } (trois façons en tout).
un fer de lance }



Un centre : Parallélogramme. Un axe : Trapèze isocèle, Cerf-Volant, Fer de lance.

Un centre et deux axes : Rectangle, Losange. Un centre et quatre axes : Carré.

FIG. 164.

320. — **Recommencer avec deux triangles égaux n'ayant que des angles aigus.**

321. — **Recommencer avec des triangles rectangles égaux.**

CHAPITRE IV

LE CERCLE

§ 1. — FIGURE FORMÉE PAR UNE DROITE ET UN CERCLE

322. Remarque. — La figure formée par une droite et un cercle admet un axe de symétrie, le diamètre perpendiculaire à cette droite. Soit I le point de rencontre de ce diamètre xy avec la droite D ; 3 cas sont à distinguer suivant que le point I est extérieur au cercle, sur le cercle ou intérieur au cercle.

Appelons d la distance OI et R le rayon ; supposons que d, d'abord

supérieur à R diminue progressivement jusqu'à zéro. On voit apparaître les résultats suivants (*fig.* 166) [1] :

I. $d > R$: *droites entièrement extérieures au cercle.*

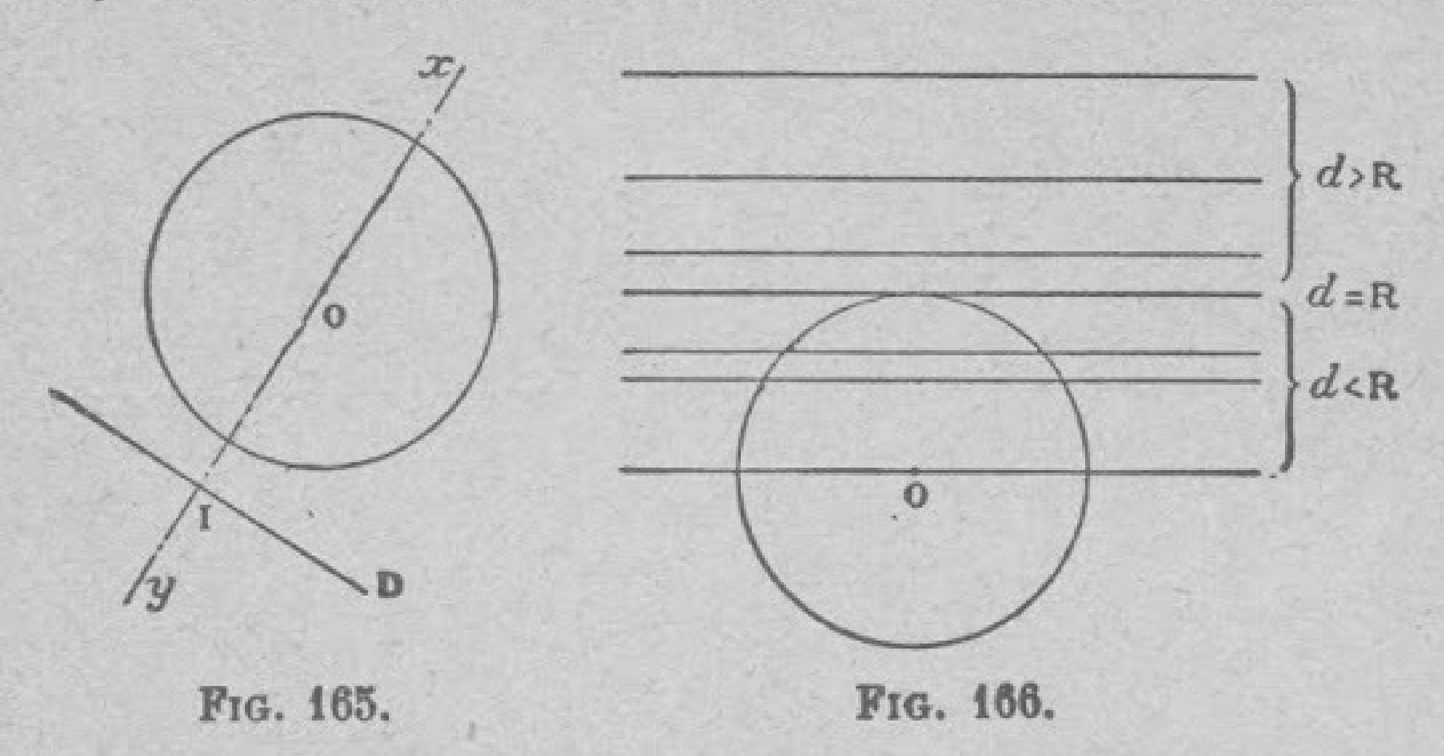


FIG. 165. FIG. 166.

II. $d = R$: la *droite est dite* **tangente** *au cercle*; elle **n'a avec** le cercle qu'un point commun appelé **point de contact.**

III. $d < R$: *droites sécantes* ; elles rencontrent le cercle en deux points symétriques par rapport à xy.

Exercices.

323. Le Jeu de Palet. — Quand des enfants jouent au palet, ils cherchent à lancer un disque de métal aussi près que possible d'une droite tracée

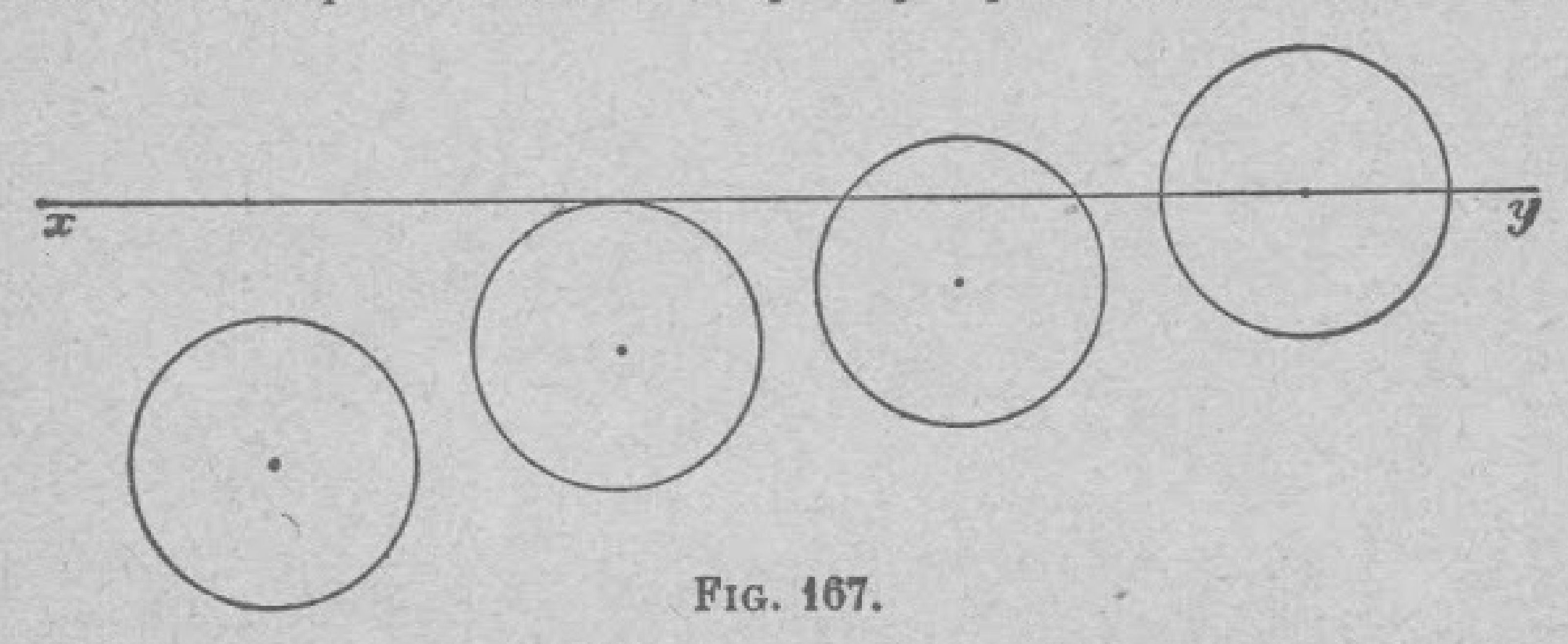


FIG. 167.

sur le sol. Indiquez toutes les positions possibles du disque et comparez chaque fois d et R (*fig.* 167).

324. — *Construire un triangle* ABC *connaissant deux côtés b, c et l'angle* B *opposé à l'un deux.* — Supposons le problème résolu ; la figure montre qu'on peut placer le côté AB, tracer le cercle de centre A et de rayon b (C est sur ce cercle) et obtenir C au moyen d'une demi-droite Bx faisant l'angle B avec AB. (Par symétrie, on s'est borné ci-dessous à construire Bx à droite de BA.)

(1) Tracez le diamètre perpendiculaire aux droites.

1er Exemple :	$b = 60^{mm}$	$c = 50^{mm}$	$B = 70^{gr}$.
2e Exemple :	$b = 60^{mm}$	50^{mm}	140^{gr}.
3e Exemple :	$b = 40^{mm}$	60^{mm}	30^{gr}.

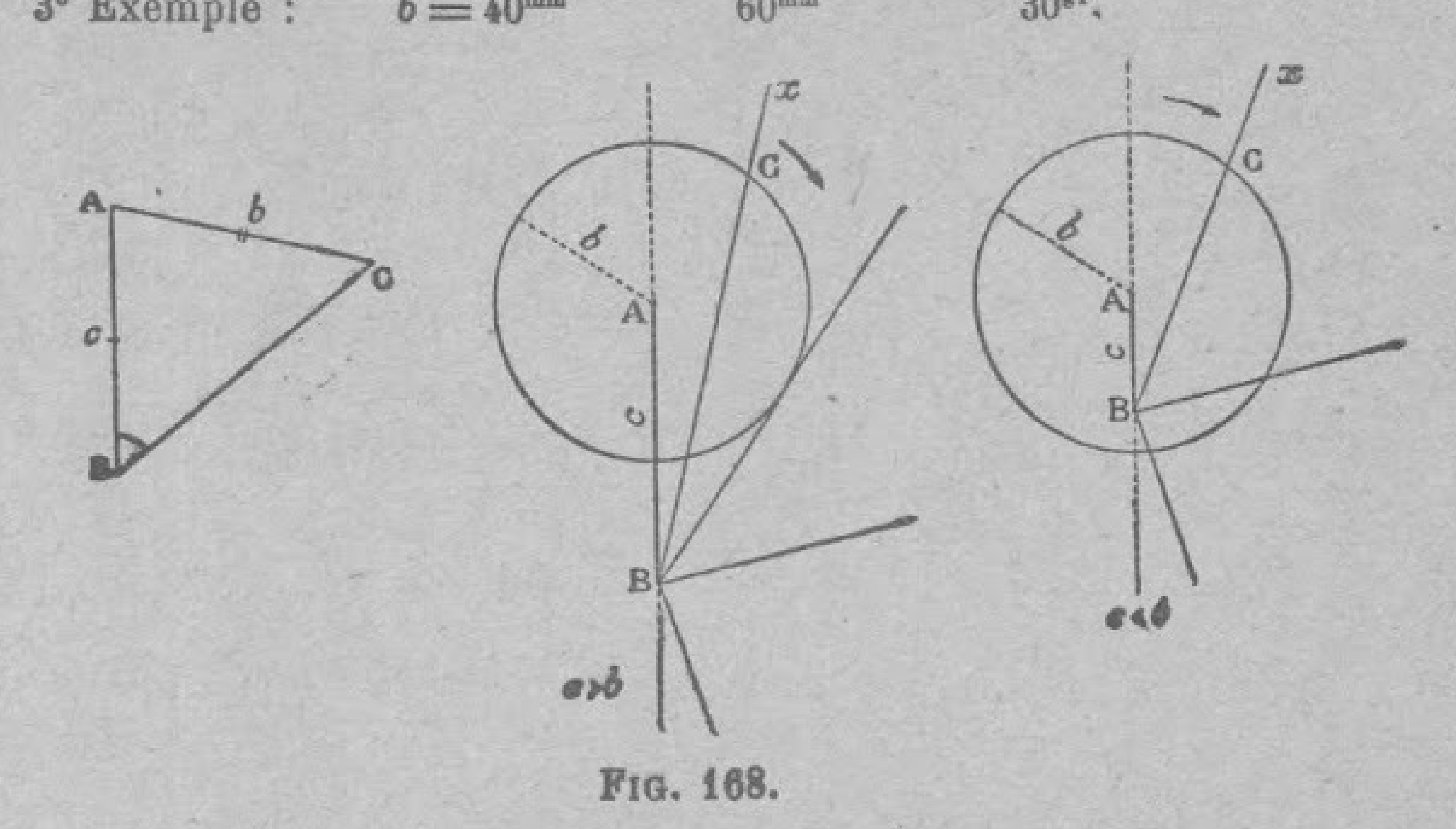


FIG. 168.

325. REMARQUE. — Ces constructions **amènent à distinguer deux cas.**

1° $c > b$, le problème n'est possible que si la demi-droite Bx coupe le cercle; on a donc deux, une, ou zéro solution.

2° $c < b$, le problème admet toujours une solution.

Cette dernière conclusion peut encore être énoncée sous la forme suivante : *Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun ainsi que l'angle opposé au plus grand de ces côtés, ces deux triangles sont égaux.*

326. Diverses définitions de la tangente à un cercle : (fig. 169).

I. *Droite qui a, avec le cercle, un point commun et un seul;*

II. *Perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon;*

III. *Droite dont la distance au centre est égale au rayon.*

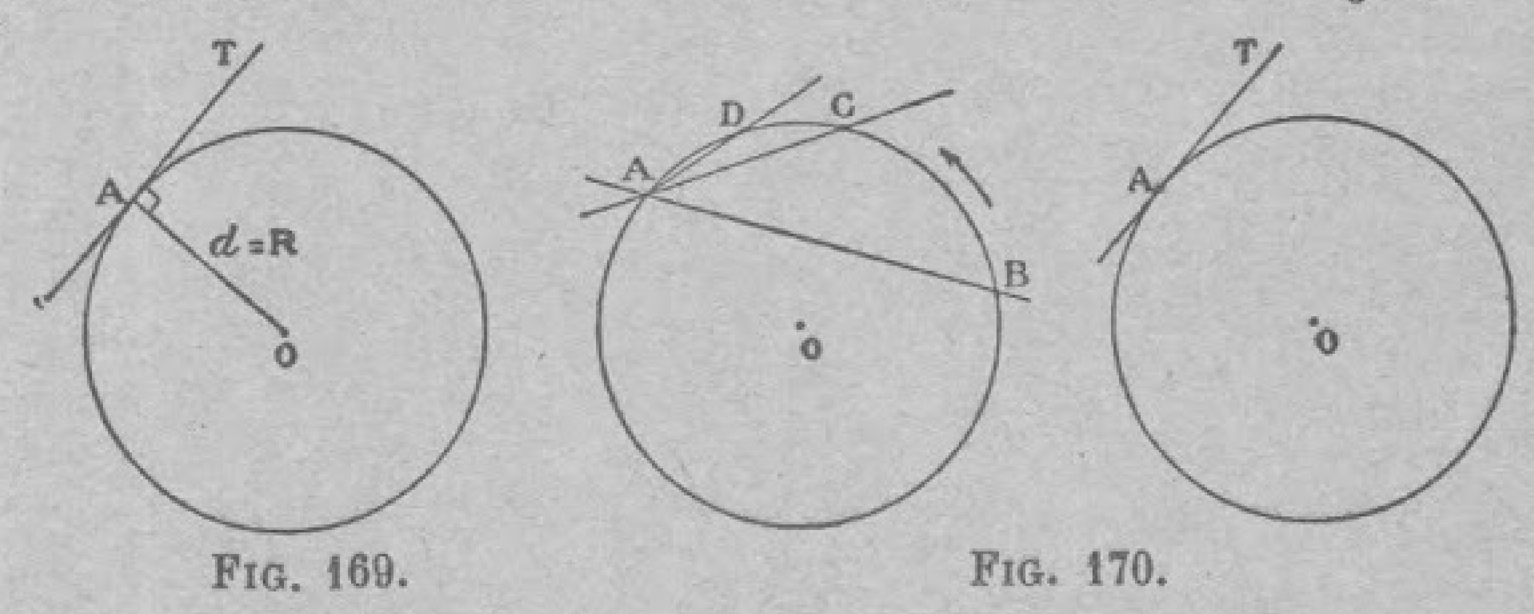


FIG. 169. FIG. 170.

327. Exercice. — Tracer un cercle. Marquer sur ce cercle un point A et des points B, C, D, de plus en plus rapprochés de A; tracer les droites AB, AC, AD. .. Qu'obtient-on en imaginant que le point D se rapproche indéfiniment de A ?

On dira que : *La tangente en A est la position limite d'une sécante AB, quand B se rapproche indéfiniment de A.*

Tracés de cercles.

328. — Tracer un cercle de rayon 25^{mm}, tangent à une droite donnée en un point donné A (deux solutions). Le point A étant toujours le même, recommencer avec des rayons différents. Où se trouvent les centres des cercles?

329. — O étant un point donné, peut-on tracer un cercle de centre O tangent à une droite donnée? Comment avoir son rayon?

329 *bis*. — Trouver le lieu géométrique des centres des cercles de 24^{mm} de rayon, tangents à une droite donnée.

330. — Tracer un cercle tangent à deux droites parallèles. (Où prendre son centre?)

330 *bis*. — On donne deux droites parallèles et un point A situé entre elles; construire un cercle tangent à ces deux droites et passant par A.

331. — Tracer un cercle tangent à deux droites concourantes. (Où prendre son centre?)

331 *bis*. — Tracer un cercle de 25^{mm} de rayon tangent à deux droites concourantes.

332. — *Peut-on tracer un cercle tangent aux trois côtés d'un triangle?*

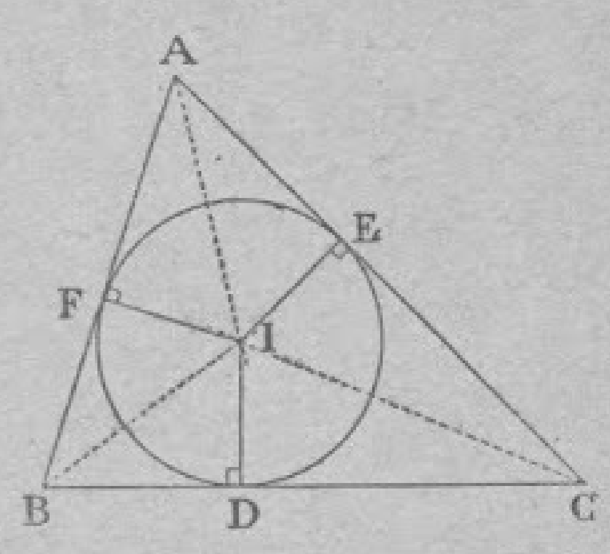


FIG. 171.

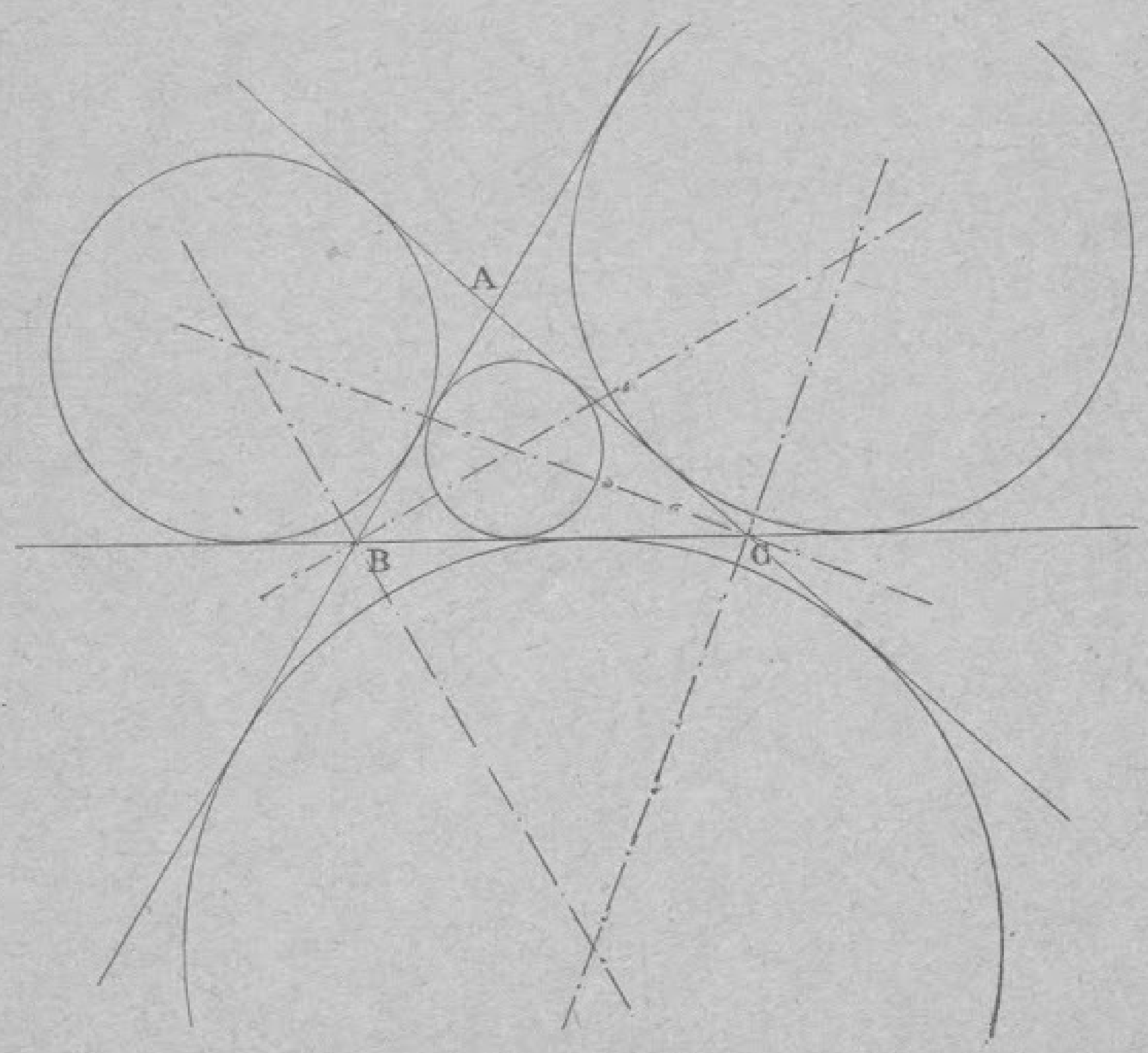


Fig. 171 *bis*.

Nous avons vu que les trois bissectrices intérieures d'un triangle passent par un même point. Ce point est à égale distance des trois côtés : ID = IE = IF.

Le cercle de centre I et de rayon ID sera tangent aux trois côtés; c'est le cercle inscrit au triangle. Ainsi :

On appelle **cercle inscrit** *à un triangle le cercle tangent aux trois côtés. Son centre est le point de rencontre des bissectrices intérieures du triangle.* Inversement, on dit que *le triangle est* **circonscrit** *au cercle.*

Plus généralement, il existe quatre cercles tangents aux trois droites obtenues en prolongeant indéfiniment les côtés d'un triangle (v. le n° 175). Leurs centres s'obtiennent en traçant les six bissectrices du triangle.

§ 2. — PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE DU CERCLE

Nous avons vu que *tout diamètre d'un cercle est axe de symétrie pour le cercle* (109).

333. Théorème. — *Si un diamètre est perpendiculaire à une corde, il partage cette corde en deux parties égales, et partage aussi en deux parties égales chacun des deux arcs qu'elle soustend.*

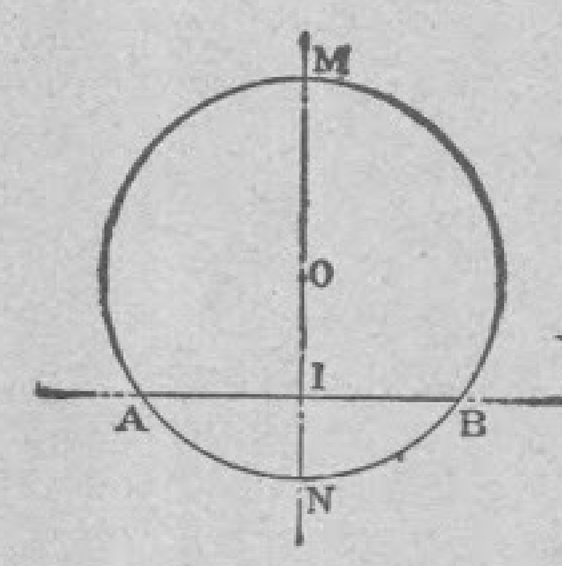
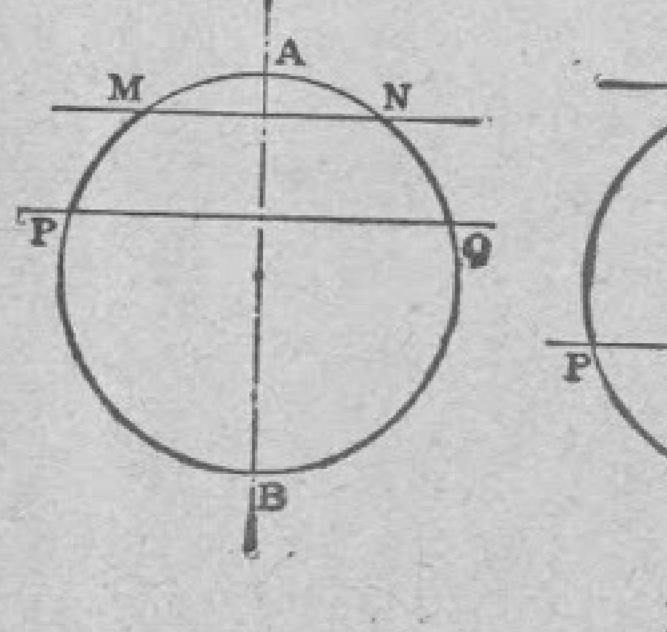
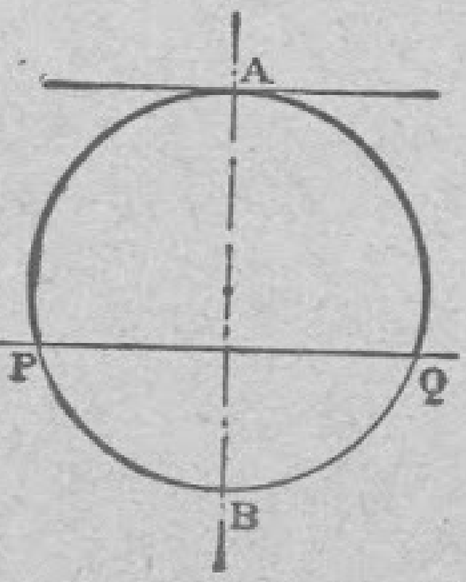


FIG. 172.

En effet, le diamètre MN est axe de symétrie pour le cercle. S'il est perpendiculaire à la corde AB, c'est un axe de symétrie pour la droite illimitée AB. C'est donc un axe de symétrie pour toute la figure. Un pliage autour de MN amènera la partie qui est d'un côté sur l'autre partie. Donc I est au milieu de AB, M est au milieu de l'arc AMB, N est au milieu de l'arc ANB.

334. Théorème. — *Si deux sécantes à un cercle sont parallèles, elles interceptent sur ce cercle des arcs égaux.*





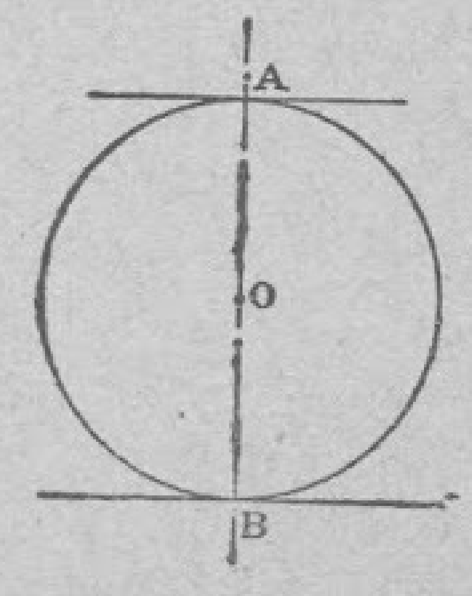


FIG. 173.

En effet le *même* diamètre est perpendiculaire aux deux sécantes (puisqu'elles sont parallèles) et c'est un axe de symétrie pour toute la figure. Le théorème subsiste si l'une des sécantes devient tangente, ou même si les deux deviennent tangentes.

335. Construction. — *Mener par un point* A *une tangente à un cercle.* — Il est bien évident que par un point A intérieur au cercle, il ne passe aucune tangente, et que par un point A du cercle il ne passe qu'une tangente : la tangente en A.

FIG. 174.

Supposons donc A extérieur au cercle. Remarquons qu'il revient au même de dire que AM est tangente ou que l'angle OMA est droit. Mais dire que OMA est droit, équivaut à dire que M est sur le cercle de diamètre OA (274). D'où la construction :

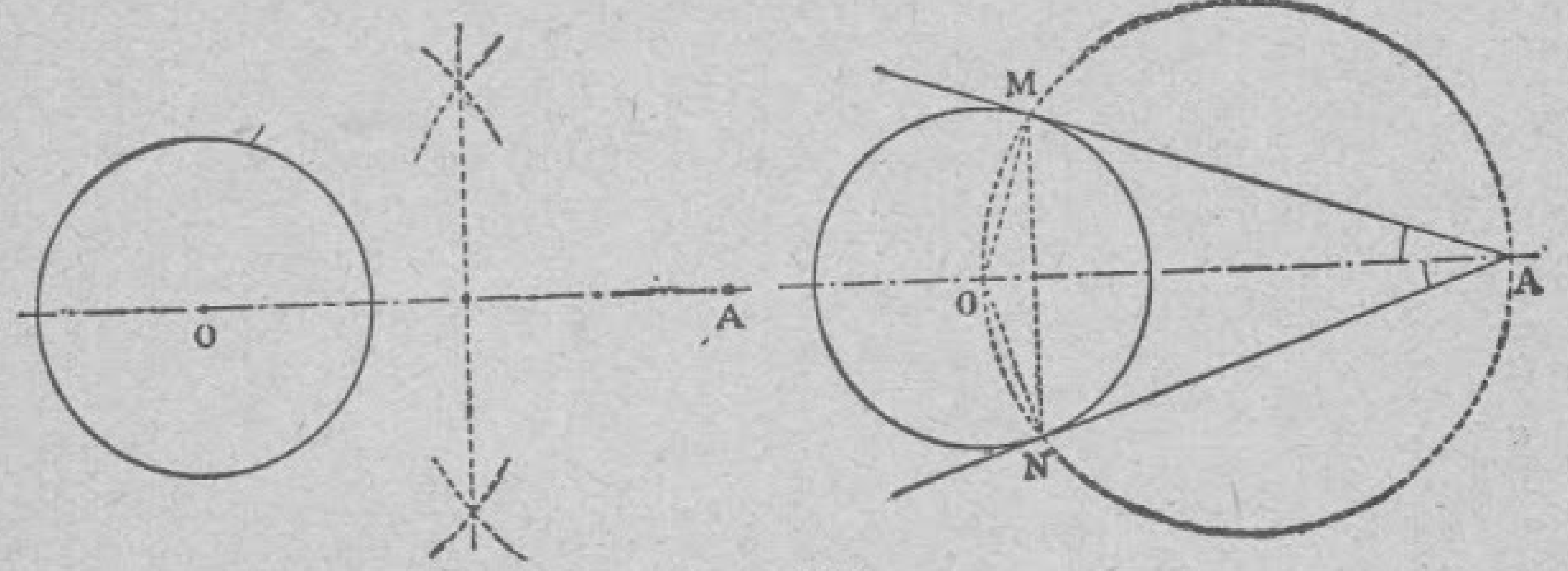


FIG. 175.

336. REMARQUE. — La droite OA est axe de symétrie pour toute la figure. Donc :

Théorème. — 1° *D'un point extérieur à un cercle, on peut lui mener deux tangentes;*

2° *Ces deux tangentes sont égales* : AM = AN;

3° *La droite* OA *est perpendiculaire au milieu de la corde* MN *qui joint les points de contact; elle est bissectrice de l'angle* MAN *formé par les tangentes; elle est bissectrice de l'angle* MON *des rayons des points de contact.*

337. — A quoi est égale la distance de deux tangentes parallèles? (Application: pied à coulisse).

§ 3. — FIGURE FORMÉE PAR DEUX CERCLES

338. Positions relatives de deux cercles. — Considérons deux cercles quelconques (n'ayant ni le même centre, ni les rayons égaux); la figure formée par ces deux cercles admet un axe de symétrie : la droite des centres OO′.

Appelons d la distance des centres OO′, R et R′ les rayons (R étant le plus grand).

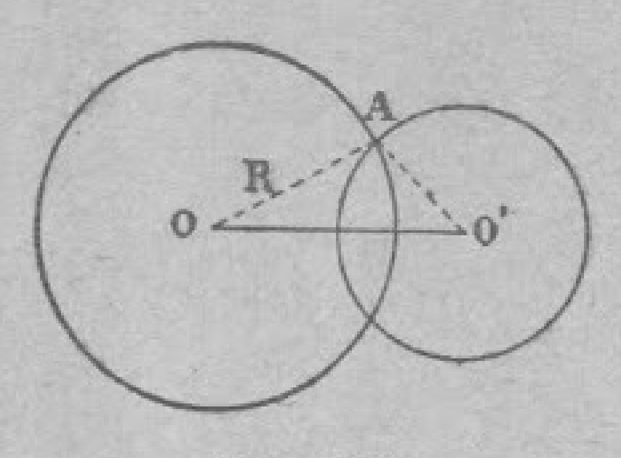


Fig. 176.

Ces deux cercles peuvent occuper, l'un par rapport à l'autre, les positions suivantes :

1° *Ils ont deux points communs*; ces points A et B sont symétriques par rapport à OO'; dans le triangle AOO', on voit que l'on a

$$R - R' < d < R + R'.$$

2° *Ils ont en commun un point et un seul* (situé sur la droite des centres); en ce point A les deux cercles ont la même tangente AT; on dit qu'*ils sont tangents.*

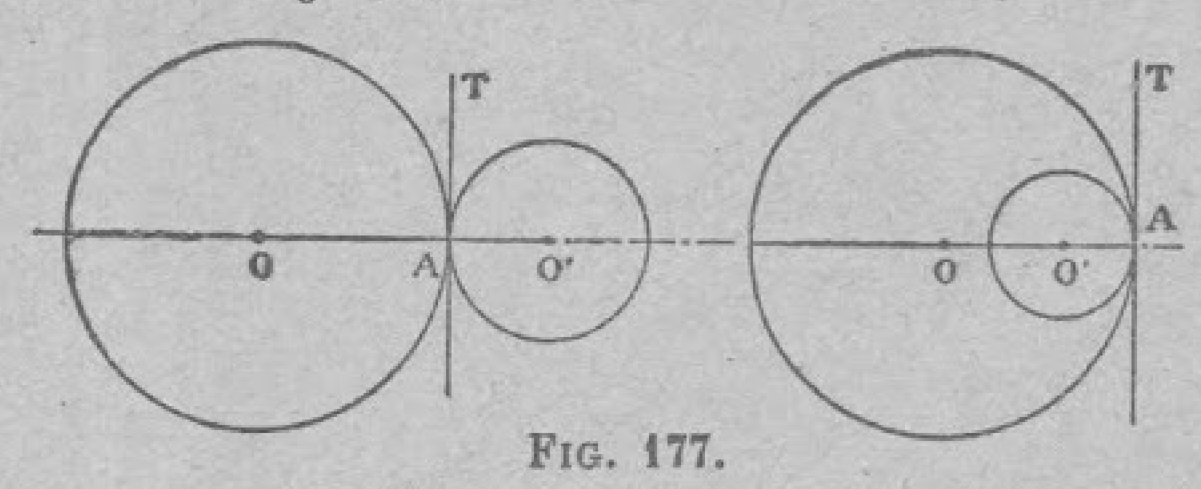


Fig. 177.

S'ils sont tangents *extérieurement*, on a $d = R + R'$
S'ils sont tangents *intérieurement*, on a $d = R - R'$.

3° *Ils n'ont aucun point commun.* Le plus petit peut être extérieur au plus grand ou intérieur au plus grand.

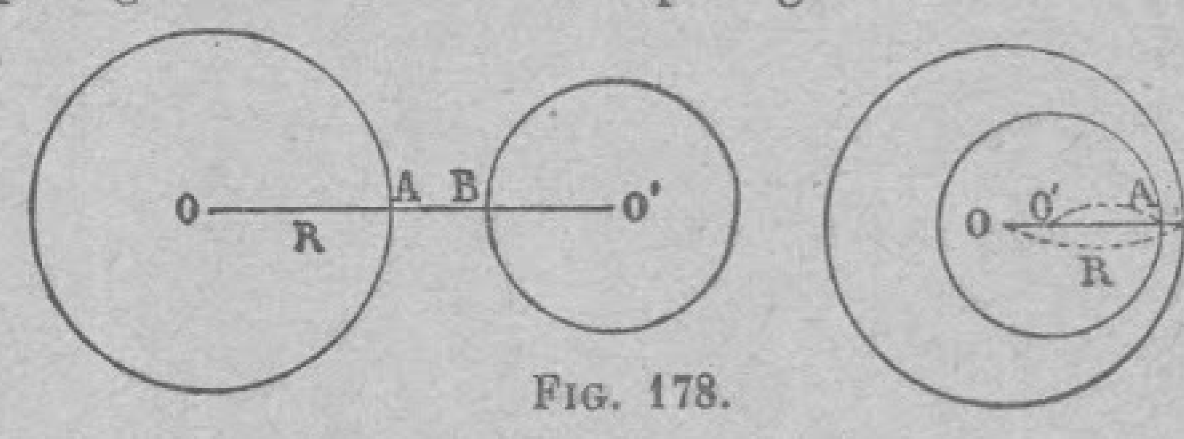


Fig. 178.

Dans le 1er cas, on voit que l'on a

$$d > R + R'.$$

Dans le 2e cas, en voit que OA est inférieur à OB, ou

$$d + R' < R \quad \text{ou} \quad d < R - R'.$$

339. Étude des positions par déplacement du petit cercle. — Pour retrouver systématiquement ces positions, nous allons supposer que le grand cercle est fixe tandis que le petit cercle, d'abord très éloigné, s'en rapproche progressivement, son centre O' décrivant le diamètre xy.

Figurons d'avance les deux positions C et D du centre du cercle mobile quand il est tangent au cercle fixe. On a

$$OC = R + R' \qquad OD = R - R'.$$

Cela posé, imaginons que $d = OO'$, d'abord très grand, diminue sans cesse; on voit apparaître les résultats suivants :

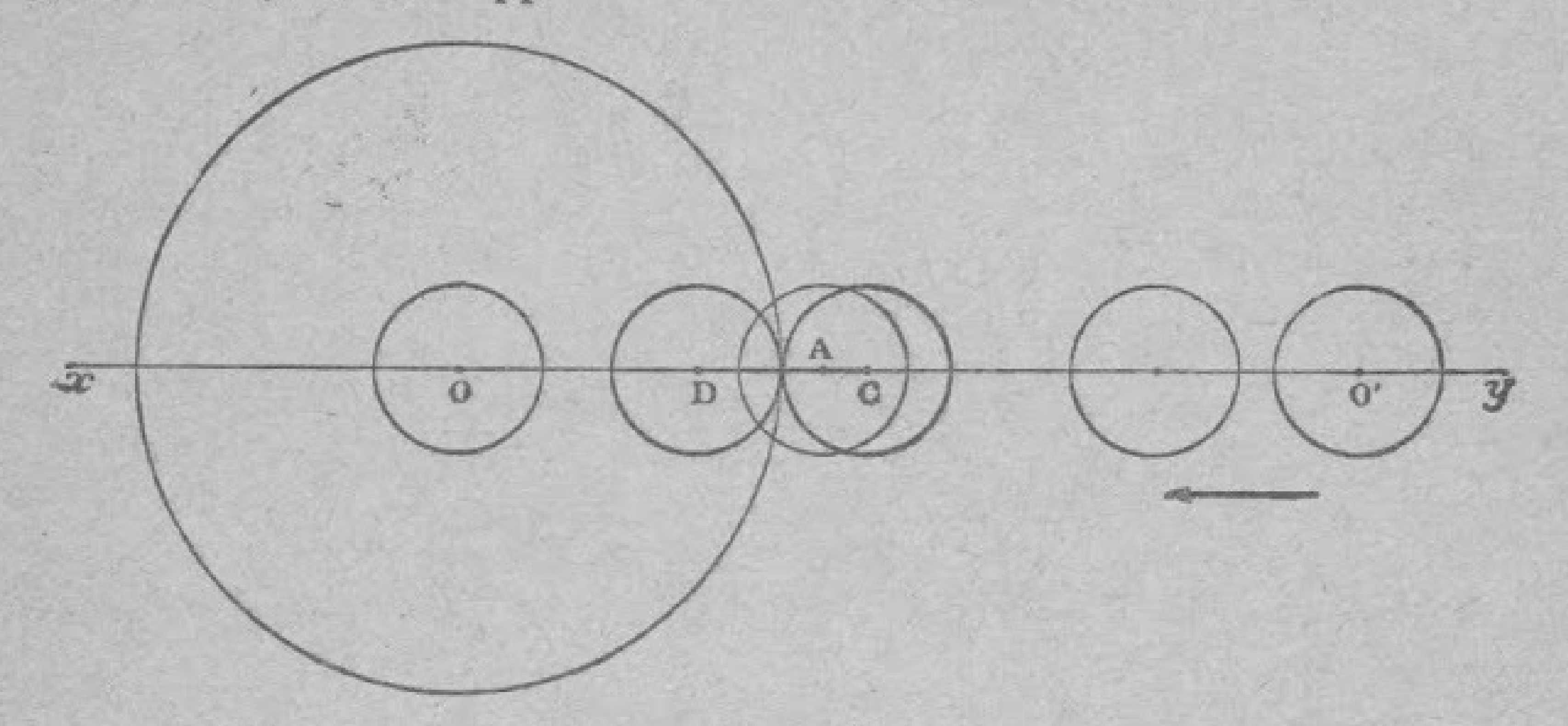


Fig. 179.

1° $d > R + R'$	*O' à droite de C*	*cercles extérieurs l'un à l'autre.*
Cas limite : $d = R + R'$	*O' en C*	*cercles tangents extérieurement.*
2° $R - R' < d < R + R'$	*O' entre C et D*	*cercles sécants.*
Cas limite : $d = R - R'$	*O' en D*	*cercles tangents intérieurement.*
3° $d < R - R'$	*O' entre O et D*	*cercles intérieurs l'un à l'autre.*

340. Remarque I. — L'étude précédente fait apparaître la propriété importante suivante :

Théorème. — *Pour que deux cercles se coupent, il faut et il suffit que la distance des centres soit comprise entre la somme et la différence des rayons.*

341. Remarque II. — Nous avons vu que dans tout triangle, un côté quelconque est compris entre la somme et la différence des deux autres.

Supposons qu'on veuille construire un triangle ayant pour côtés trois segments donnés a, b, c. Si l'un des segments a est compris entre la somme et la différence des deux autres :

$$b - c < a < b + c.$$

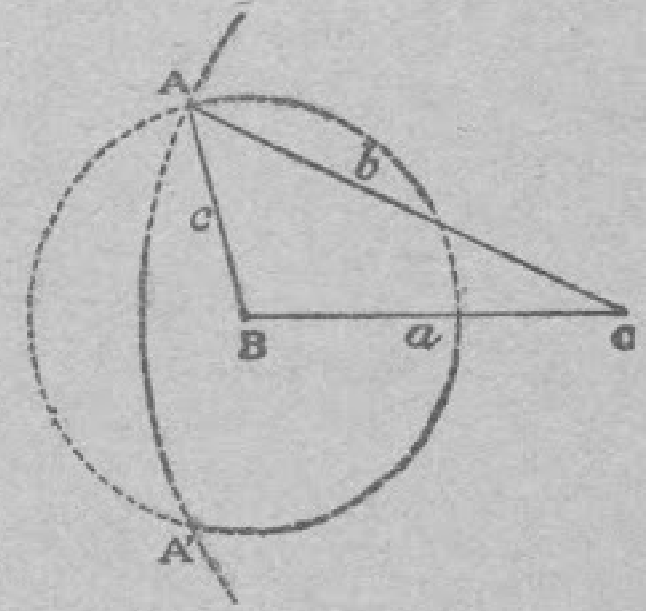


Fig. 179 *bis*.

On placera le côté a; les cercles de centre B (rayon c) et de centre C (rayon b) se couperont en deux points A, A' et la construction est possible.

Par conséquent :

*Étant donné trois longueurs, pour qu'elles soient les côtés d'un triangle, **il faut et il suffit que l'une d'elles soit comprise entre la somme et la différence** des deux autres.*

Exercices.

342. — Étudier et dessiner les positions relatives de deux cercles égaux. On en trouvera trois.

343. — Tracer un cercle de 43^{mm} de rayon; construire un cercle de 18^{mm} de rayon qui lui soit tangent en un point donné A (extérieurement, puis intérieurement). Quand A varie, que peut-on dire du centre du cercle cherché?

344. — Étant donné un cercle de 50^{mm} de rayon et un point A situé à 65^{mm} du centre, tracer un cercle de 28^{mm} de rayon, passant par A et tangent au cercle donné. (Trouver deux lieux géométriques du centre.)

345. — Construire trois cercles de 25^{mm} de rayon tangents entre eux. Trouver un cercle qui soit tangent extérieurement à ces trois cercles.

346. — Deux cercles sont tangents intérieurement en A. Par le point B diamétralement opposé à A dans le grand cercle, on mène une corde BC tangente au petit cercle en M. On joint AB, AC, AM et on prolonge BC jusqu'au point S où elle rencontre la tangente commune. Supposant connu l'angle B (ABC), évaluer les divers angles de la figure (il y a un triangle isocèle). En déduire une propriété des droites AB, AC, AM.

347. — 1° Marquer deux points O, O′ ($OO' = 56^{mm}$); tracer le cercle de centre O de rayon 24^{mm} et les tangentes issues de O′ à ce cercle. 2° Tracer le cercle de centre O de rayon 32^{mm} et le cercle de centre O′ de rayon 8^{mm}, puis les tangentes communes *extérieures* à ces deux cercles (directement en faisant simplement affleurer les bords de la règle aux deux cercles); 3° Recommencer la construction du 2° en donnant aux cercles des rayons de 40^{mm} et 16^{mm}. Que remarque-t-on sur les tangentes ainsi tracées?

348. — Ayant opéré comme dans la première partie de l'exercice précédent, tracer le cercle de centre O de rayon 16^{mm} et le cercle de centre O′ de rayon 8^{mm}, tracer les tangentes communes *intérieures* à ces deux cercles; recommencer en prenant pour rayons 8^{mm} et 16^{mm}. Que remarque-t-on sur les tangentes ainsi tracées?

§ 4. — CORDES ET ARCS SOUS-TENDUS

Deux points A et B d'un cercle, non diamétralement opposés, déterminent deux arcs inégaux, l'un plus petit qu'un demi-cercle, l'autre plus grand qu'un demi-cercle. Dans ce qui suit, l'expression **arc sous-tendu par la corde AB** désignera **le plus petit des deux arcs AB.**

349. Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

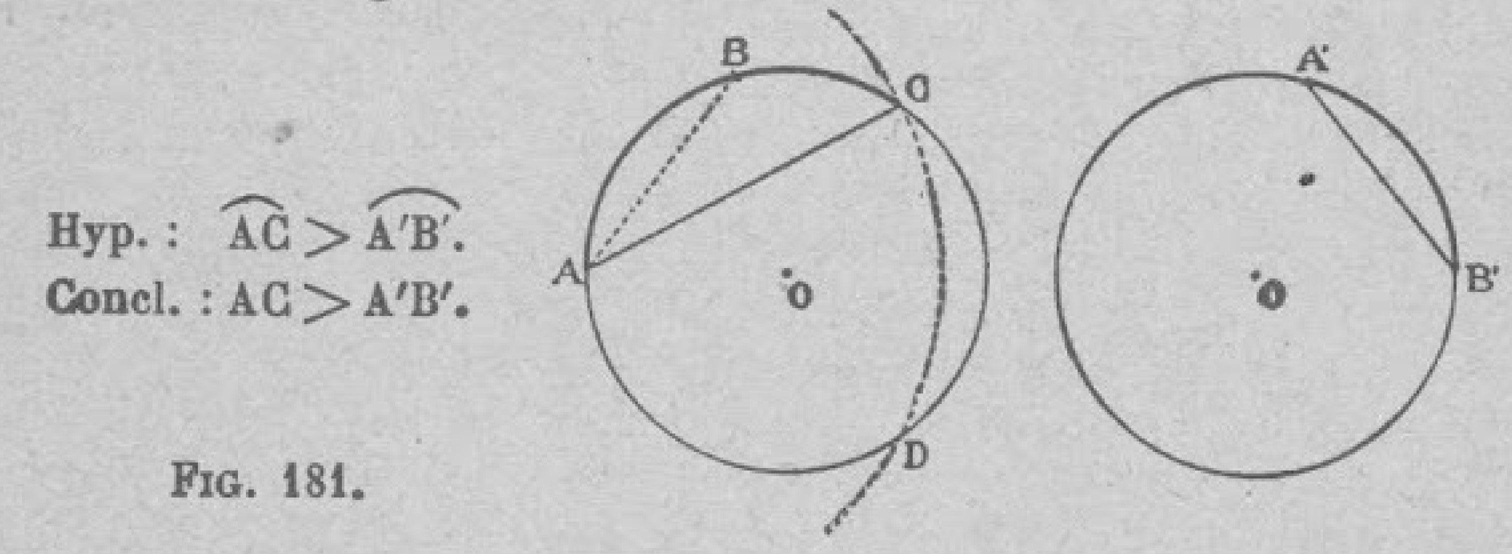
1° Si deux arcs sont égaux, ils sont sous-tendus par des cordes égales.

2° Si un premier arc est plus grand qu'un deuxième, la corde qui sous-tend le premier est plus grande que la corde qui sous-tend le deuxième.

Hyp. : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$.
Concl. : $AB = A'B'$.

Fig. 180.

1° Si les deux arcs sont égaux, on peut les faire coïncider; alors les deux cordes coïncident puisque leurs extrémités coïncident. Donc elles sont égales.



Hyp. : $\overset{\frown}{AC} > \overset{\frown}{A'B'}$.
Concl. : $AC > A'B'$.

Fig. 181.

2° L'arc AC étant supérieur à A′B′, si nous portons à partir de A un arc AB égal à A′B′, son extrémité B sera entre A et C. D'après la 1re partie, les cordes AB et A′B′ sont égales. Il s'agit donc de démontrer que $AC > AB$. Pour cela traçons le cercle de centre A passant par C. Il coupe le cercle O aux points C et D; l'arc CAD est intérieur à ce cercle auxiliaire; donc le point B est intérieur et sa distance au centre, AB, est inférieure au rayon AC.

350. Théorème réciproque. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° Si deux cordes sont égales, elles sous-tendent des arcs égaux;

2° Si une première corde est plus grande qu'une deuxième, l'arc sous-tendu par la première est plus grand que l'arc sous-tendu par la deuxième.

Démonstration par l'absurde en s'appuyant sur le théorème direct :

1° Si les cordes sont égales, les arcs ne peuvent pas être différents,

sinon, d'après le théorème direct, les cordes devraient l'être aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° Si la corde AB est supérieure à la corde A'B', l'arc AB ne peut être ni égal à l'arc A'B' (sinon les cordes seraient égales : 1re partie du théorème direct), ni inférieur à l'arc A'B' (sinon la corde AB serait inférieure à la corde A'B' : 2e partie du théorème direct).

351. **En résumé** : *Un arc (inférieur à un demi-cercle) et sa corde varient dans le même sens* : si l'un augmente, l'autre augmente. (Voir l'exercice 78, page 96.)

352. Utilité pratique de ce théorème. — Pour porter sur un même cercle, par exemple, des arcs égaux, il suffit de porter, au moyen du compas, les cordes égales correspondantes.

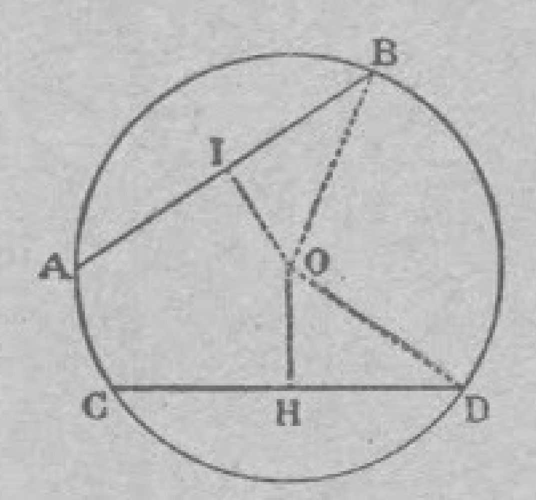
§ 5. — CORDES ET DISTANCES AU CENTRE

353. Théorème. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° Si deux cordes sont à la même distance du centre, elles sont égales;

2° Si une première corde est plus près du centre qu'une deuxième, elle est plus grande que la deuxième.

Soient AB et CD deux cordes d'un même cercle, OI et OH les perpendiculaires menées du centre à ces cordes. Remarquons que I est au milieu de AB, H au milieu de CD.



Hyp. { OI perp. à AB. OH perp. à CD. OI = OH

Concl. : AB = CD.

FIG. 182.

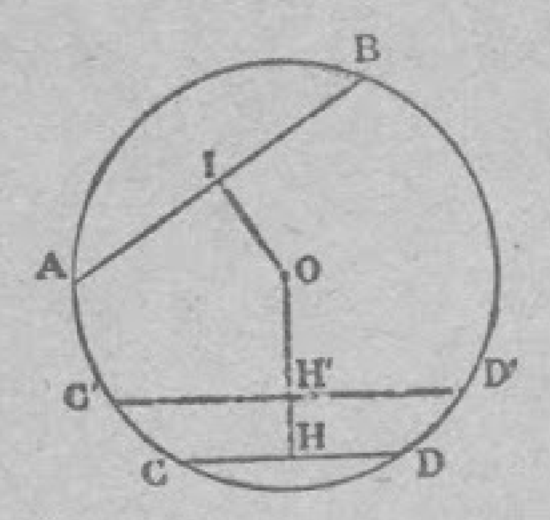
1° Supposons OI = OH. Les deux triangles rectangles OIB, OHD sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale (rayons) et un côté de l'angle droit égal (OI = OH). Donc BI = DH.

Les demi-cordes étant égales, les cordes AB et CD le sont.

2° Supposons maintenant OI < OH. Portons sur OH une longueur OH' égale à OI et menons par H' la corde C'D' parallèle à CD.

D'après la 1re partie, C'D' = AB. Il s'agit donc de démontrer que la corde C'D' est supérieure à CD.

Or le point H est plus loin du centre que le point H', donc les



Hyp. { OI perp. à AB, OH perp. à CD. OI < OH

Concl. : AB > CD.

FIG. 183.

points C et D sont sur l'arc C'D'. L'arc CD est donc plus petit que l'arc C'D' ; il en est de même de leurs cordes : CD < C'D'.

354. Théorème réciproque. — *Dans un même cercle ou dans des cercles égaux :*

1° Si deux cordes sont égales, elles sont à la même distance du centre;

2° Si une première corde est plus grande qu'une deuxième, la première corde est plus près du centre que la deuxième.

Démonstration par l'absurde

355. **En résumé**, *Une corde et sa distance au centre varient en sens contraire* : si l'une augmente, l'autre diminue. (V. l'exercice 79, p. 96.)

356. REMARQUE. — Si l'on imagine dans un cercle toutes les cordes égales à une longueur donnée, elles sont en nombre infini et sont toutes à une même distance OI du centre. Par suite elles sont toutes tangentes à un cercle concentrique qui est en même temps la ligne formée par leurs milieux.

Une rotation autour de O amène la corde AB sur toutes les cordes égales.

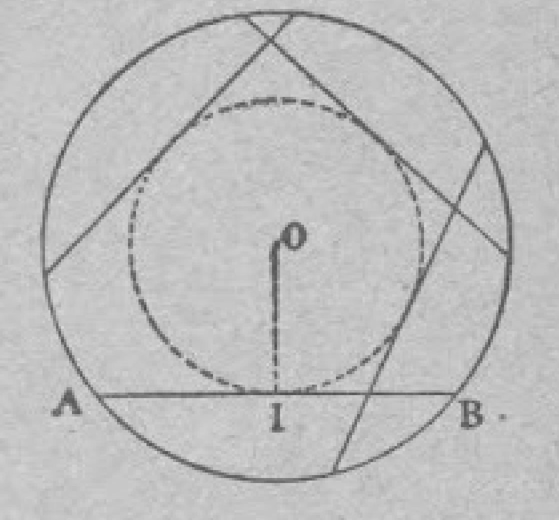


FIG. 184.

Exercices. 357. — Tracer plusieurs cercles de 25mm de rayon découpant sur une droite donnée une corde de 28mm. Où sont les centres de ces cercles?

358. — Tracer plusieurs cercles de 30mm de rayon découpant sur un cercle de 70mm de rayon un arc de 20gr. Où sont les centres de tous ces cercles?

§ 6. — ARCS ET ANGLES INSCRITS

359. Définition. — On appelle angle inscrit dans un cercle l'angle formé par deux cordes issues d'un même point du cercle. L'arc intérieur à l'angle s'appelle **arc intercepté.**

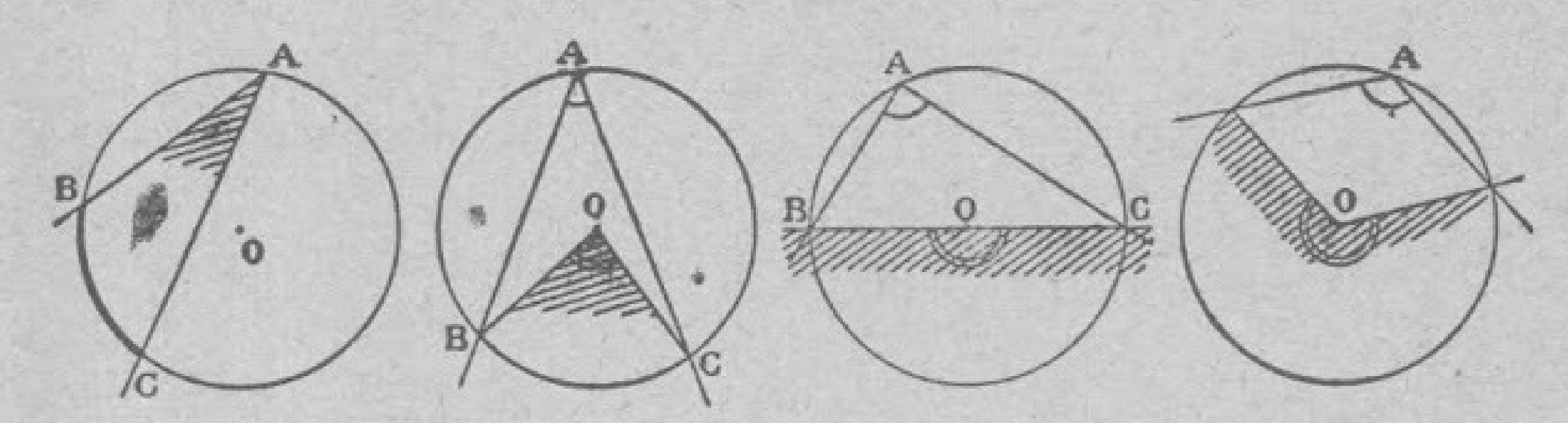


FIG. 185. Angle inscrit et arc intercepté.

FIG. 186. Angles inscrits et angles au centre correspondants.

360. Théorème. — *Tout angle inscrit dans un cercle est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.*

Nous considérerons 3 cas suivant que le centre du cercle est sur l'un des côtés de l'angle inscrit, ou qu'il est intérieur à cet angle, ou qu'il est extérieur (*fig.* 187) :

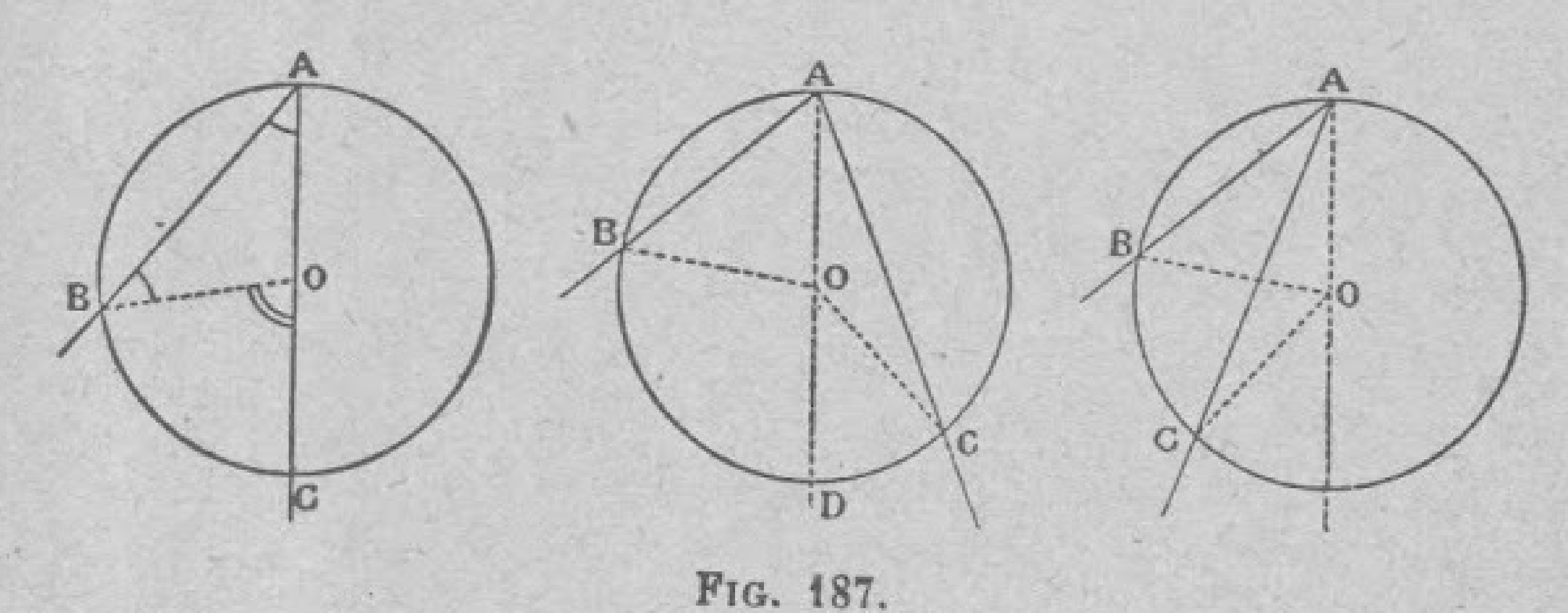


FIG. 187.

1° Le triangle OAB est isocèle. L'angle BOC est extérieur à ce triangle; donc

$$\widehat{BOC} = A + B = A + A.$$

$\widehat{BOC}$ est double de BAC.

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}.$$

2° Traçons le diamètre AD :

$$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BOD}}{2},$$

$$\widehat{CAD} = \frac{\widehat{COD}}{2}.$$

ajouter membre à membre.

3° Même méthode, en retranchant membre à membre.

361. Conséquences. — I. *Si des angles inscrits dans un même cercle interceptent le même arc, ils sont égaux.*

En effet ils sont égaux à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

Plus généralement : *Si des angles inscrits dans un même cercle interceptent des arcs égaux, ils sont égaux.*

II. *Tout angle inscrit dans un demi-cercle* (1) *est droit* (fig. 188 *bis*). En effet c'est la moitié de l'angle au centre qui, ici, est un angle plat.

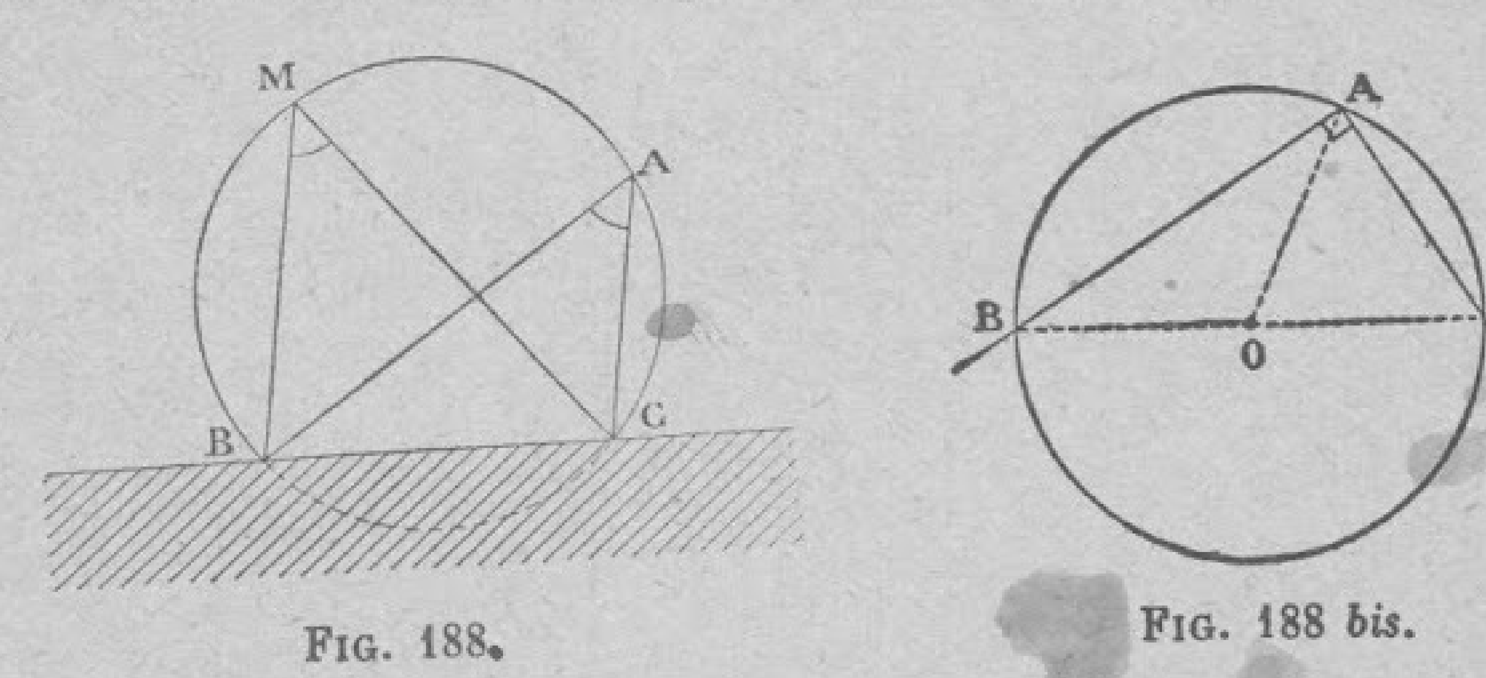


FIG. 188. FIG. 188 *bis*.

III. Si l'arc intercepté BC vaut, par exemple, *68 grades*, l'angle au centre BOC vaut aussi 68 grades (65) et *l'angle inscrit*, BAC, étant la moitié de l'angle au centre, vaut **34 grades**.

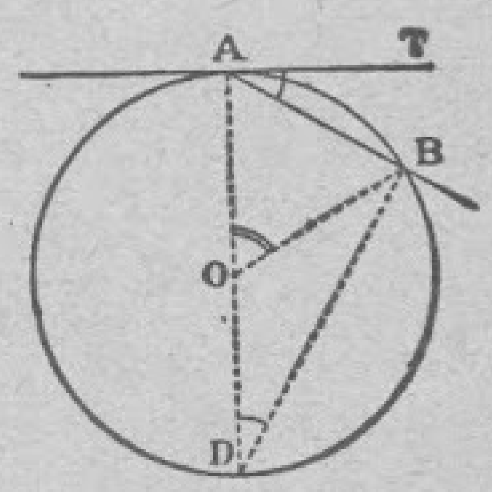


FIG. 189.

362. REMARQUE. — Le théorème de l'angle inscrit s'étend au cas où une des cordes devient tangente :

L'angle formé par une tangente et une corde passant par le point de contact est égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc.

(1) C'est-à-dire un angle inscrit dont les côtés coupent le cercle aux extrémités d'un diamètre.

Bornons-nous au cas où l'angle est aigu.
Menons en effet le diamètre AD qui passe par le sommet :

$$\widehat{TAB} = \widehat{BDA} \text{ (angles aigus à côté perpendiculaire)}$$

et

$$\widehat{BDA} = \frac{\widehat{BOA}}{2}.$$

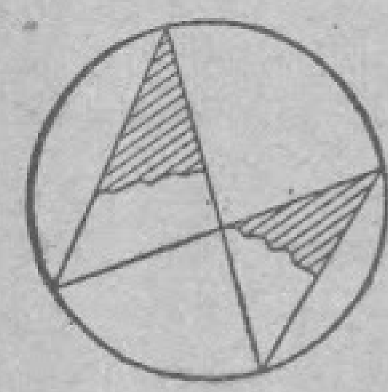


Fig. 189 *bis*.

Exercices.

363. — Vérifier la conséquence I
au moyen du rapporteur;
en construisant des angles égaux aux deux angles inscrits;
par découpage et superposition.

364. — Construire un angle de $\frac{1^D}{3}$. Justifier la construction suivante : tracer un cercle et porter un arc BC dont la corde est égale au rayon; joindre B et C à un point A du cercle.

365. — Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre O. Soit D le point où la *bissectrice intérieure* de l'angle A coupe le cercle (Traduire par une égalité d'arcs les mots soulignés). Soit E le point où la bissectrice extérieure de l'angle A coupe le cercle. Que vaut l'angle $\widehat{DAE}$? Qu'en résulte-t-il pour les points D et E?

Déduire de ce qui précède une construction qui donne, d'un seul coup, les points D et E.

366. — Un triangle ABC a le côté BC fixe et le sommet A décrit un cercle passant par B et C. Montrer que les bissectrices (intérieure et extérieure) de l'angle A pivotent autour de deux points fixes quand A décrit le cercle.

Quadrilatère inscriptible (ou inscrit).

367. Définition. — On appelle **quadrilatère inscrit** dans un cercle un quadrilatère dont les quatre sommets sont sur le cercle.

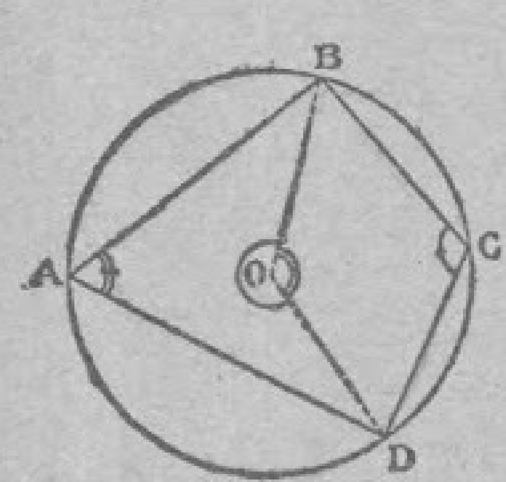


Fig. 190.

368. Théorème. — *Si un quadrilatère convexe est inscrit dans un cercle, ses angles opposés sont supplémentaires.*

En effet

$$A = \frac{1}{2} \text{ angle au centre interceptant } \widehat{BCD}.$$

$$\hat{C} = \frac{1}{2} \text{ angle au centre interceptant } \widehat{BAD}.$$

Donc $\hat{A} + \hat{C} = \frac{1}{2}$ angle couvrant tout le plan.

$$\hat{A} + \hat{C} = \text{angle plat} = 200^{gr}.$$

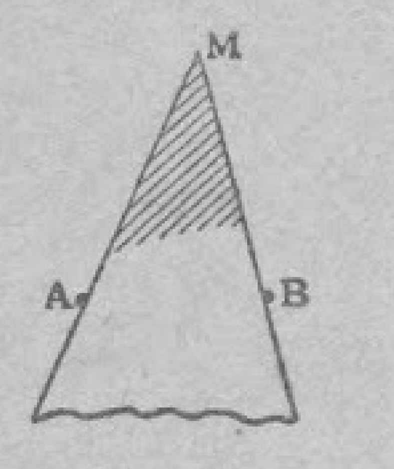
De même $\hat{B} + \hat{D} = 200^{gr}$.

Nous admettons la

369. Réciproque. — *Si un quadrilatère convexe a deux angles opposés supplémentaires, il est inscriptible dans un cercle* (c'est-à-dire qu'on peut tracer un cercle passant par les quatre sommets.

Manipulations et Exercices.

370. — Planter deux épingles A et B (ou marquer deux points A et B). Découper un angle M dans du carton; le faire glisser sur la feuille de dessin de façon à appuyer ses bords sur A et B. Marquer diverses positions du sommet.



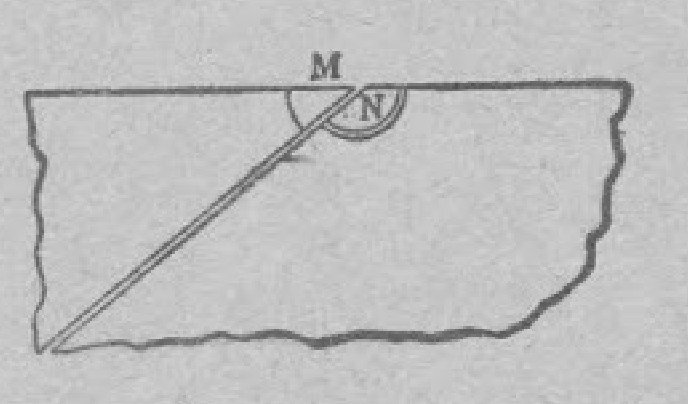


Fig. 191.

Recommencer avec un angle N supplémentaire du premier.

(M se déplaçant d'un certain côté de la droite AB, on déplacera N de l'autre côté.)

371. — Etudier si un *trapèze* peut être *inscriptible*. (Traduire les mots soulignés par des égalités d'angles.)

372. — Même question pour un parallélogramme.

§ 7. — CONSTRUCTION DE QUELQUES POLYGONES RÉGULIERS

373. Définition. — On dit qu'un polygone convexe est **régulier** quand tous ses côtés sont égaux et quand tous ses angles sont égaux.

Exemples : triangle équilatéral, carré.

Moyen d'obtenir des polygones réguliers.

374. Théorème. — *Si on divise un cercle en un certain nombre de parties égales, les points de division sont les sommets d'un polygone régulier.*

En effet, s'il y a 5 parties égales par exemple, les angles en O sont égaux, et égaux à $\frac{400^{gr}}{5} = 80^{gr}$.

Calquons la figure et faisons-la tourner de 80^{gr} autour de O; chaque rayon OA vient sur le suivant, chaque sommet du polygone vient sur le suivant. Des rotations de 80^{gr} permettent donc de superposer les angles, et les côtés, du polygone. Donc les angles sont égaux et les côtés sont égaux.

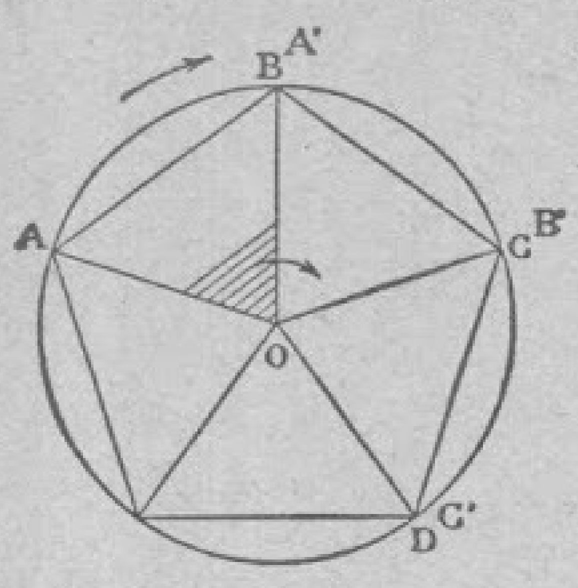


FIG. 192.

Si par exemple on veut un polygone régulier de 7 côtés, on divisera (par tâtonnements) un cercle en 7 parties égales et on joindra les points de division successifs.

Inscrire dans un cercle un hexagone régulier et un triangle équilatéral.

375. **Hexagone.** — Faire un croquis. Soit AB un côté de l'hexagone. Quelle est la valeur de l'angle $\widehat{AOB}$? qu'est le triangle $\widehat{AOB}$?

Théorème. — *Le côté de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle est égal au rayon.*

D'où la construction :

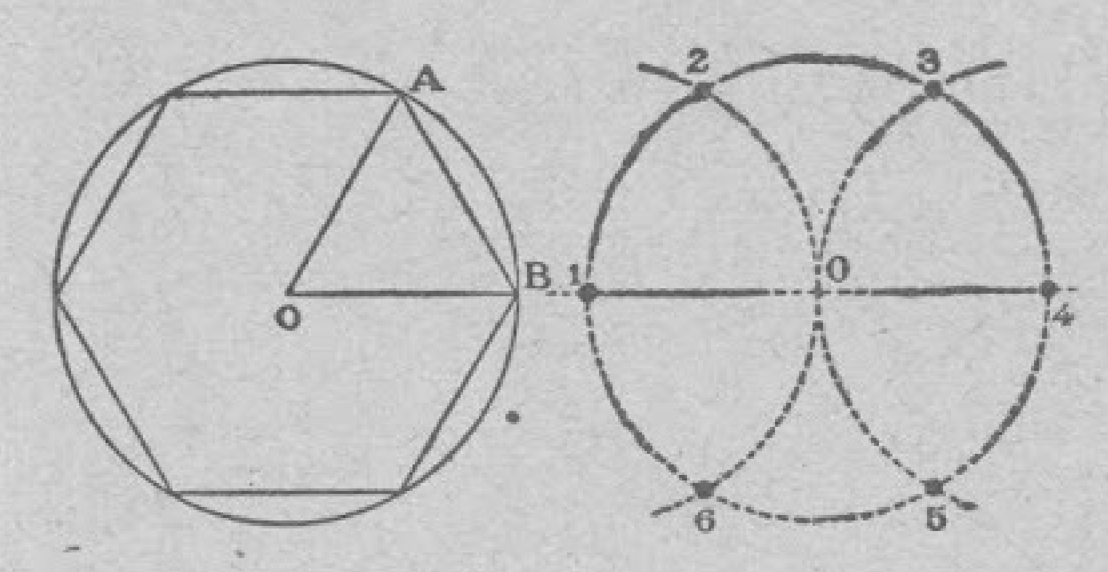


FIG. 193.

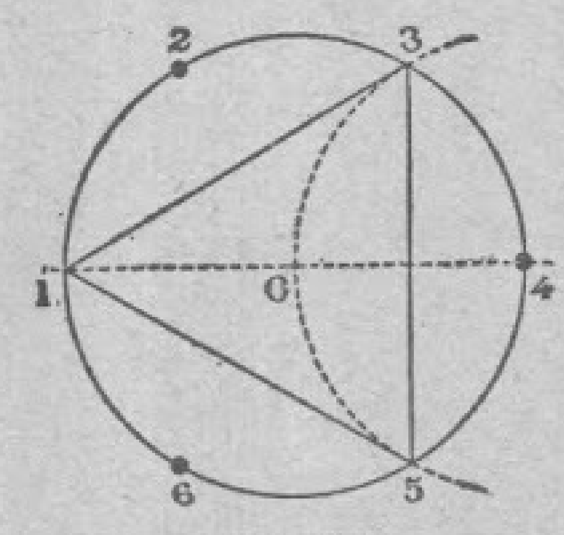


FIG. 194.

376. **Triangle équilatéral.** — Il suffit de joindre de deux en deux les sommets de l'hexagone régulier.

D'où la construction ci-contre.

REMARQUE. — C'est la construction de la perpendiculaire au milieu d'un rayon. Donc :

Théorème. — *Le côté du triangle équilatéral inscrit est perpendiculaire au milieu d'un rayon.*

377. **Carré et octogone régulier.** — On trace un diamètre, le diamètre perpendiculaire et les bissectrices des angles ainsi formés.

FIG. 195.

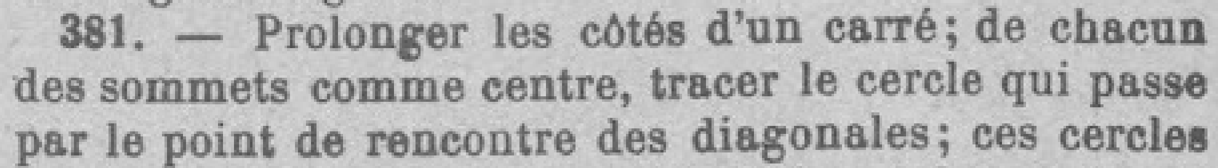
378. **Exercices.** — Découper un hexagone régulier et en déduire par pliage un triangle équilatéral.

379. — Découper un triangle équilatéral et en déduire par pliage un hexagone régulier.

REMARQUE. — L'hexagone régulier peut être divisé en trois losanges. (Carrelages.)

FIG. 196.

380. — Calculer l'angle de l'hexagone régulier.



381. — Prolonger les côtés d'un carré; de chacun des sommets comme centre, tracer le cercle qui passe par le point de rencontre des diagonales; ces cercles coupent les prolongements des côtés en huit points qui sont les sommets d'un octogone régulier.

382. **Pliage et découpage.** — Plier une feuille en deux, puis en trois;

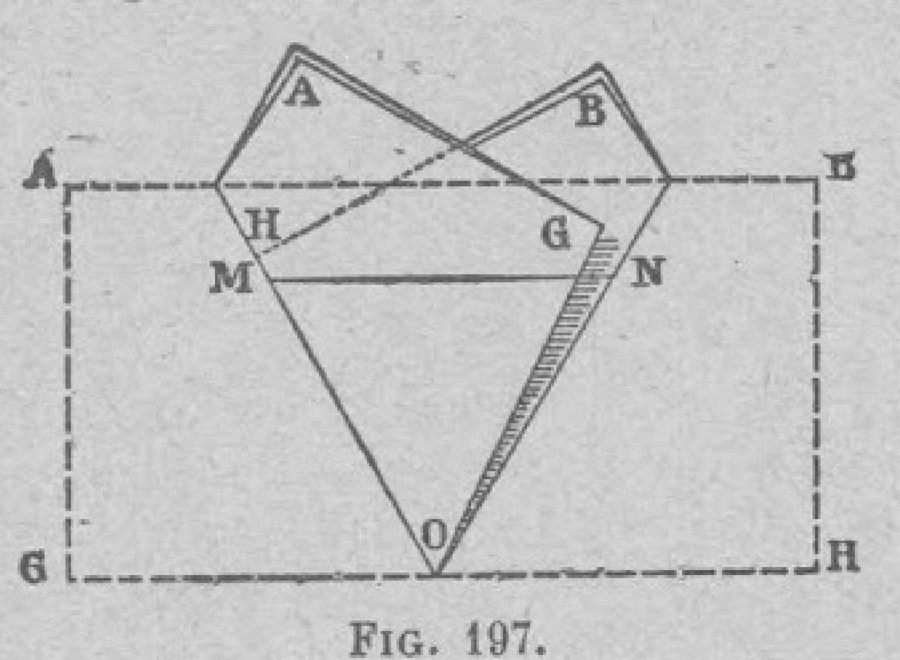


FIG. 197.

prendre OM = ON puis couper le long de MN; en dépliant on a un hexagone régulier.

383. — Même exercice en pliant une feuille en huit : on a un octogone régulier.

PROBLÈMES SUR LA PREMIÈRE PARTIE

1. — Dans un triangle rectangle il se trouve qu'un angle aigu est double de l'autre. Démontrer que l'hypoténuse est double du petit côté.

2. — Dans un triangle rectangle il se trouve que l'hypoténuse est double d'un côté de l'angle droit. Montrer que l'un des angles aigus est double de l'autre.

3. — Dans un triangle ABC (AB $<$ AC) la bissectrice extérieure de l'angle A coupe en D la droite BC; on prolonge CA d'une longueur AE égale à AB, et on joint DE. Montrer que DA est bissectrice intérieure du triangle CDE.

4. — Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun ainsi que la médiane relative à l'un d'eux, ils sont égaux.

5. — Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun ainsi que la médiane relative au troisième côté, ils sont égaux. (Prolonger cette médiane d'une longueur égale au delà de son pied.)

6. — Il se trouve que dans un triangle la bissectrice intérieure AH est aussi médiane. Que peut-on dire des triangles AHB et AHC? Qu'en déduire pour le triangle ABC?

7. — Démontrer que dans tout quadrilatère convexe la somme des diagonales est inférieure au périmètre.

8. — Démontrer qu'une médiane d'un triangle est plus courte que la demi-somme des côtés qui la comprennent.

9. — M étant un point quelconque intérieur à un triangle ABC, montrer que la somme $BM + MC$ est comprise entre BC et $BA + AC$.

10. — Quand un triangle n'a pas d'angle obtus, le rayon du cercle circonscrit est inférieur au tiers du périmètre.

11. — A quelle condition la figure formée par un cercle et deux points présente-t-elle une symétrie (axe ou centre).

12. — Démontrer que si une droite est axe de symétrie d'un triangle elle passe nécessairement par un sommet.

13. — Deux angles ont leurs côtés parallèles chacun à chacun. Que peut-on dire de leurs bissectrices? (Plusieurs cas à distinguer.)

14. — Deux angles ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun. Que peut-on dire de leurs bissectrices?

15. — Il se trouve que dans un triangle la bissectrice extérieure d'un angle est parallèle au côté opposé. Étudier le triangle.

16. — Un quadrilatère ABCD est concave en C. Connaissant les angles A, B, D, de ce quadrilatère, calculer l'angle saillant BCD.

17. — Il se trouve que dans un triangle un angle est triple d'un autre. Montrer qu'on peut couper le triangle en deux triangles isocèles.

18. — Même question avec un triangle dans lequel un angle est double d'un autre.

19. — Soit un triangle isocèle ABC. On prolonge la base BC d'une longueur CD égale à AC et on joint AD. En désignant par α l'angle ADB, évaluer les angles à la base du triangle ABC et l'angle extérieur en A du triangle ABD.

20. — On mène la hauteur AH issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC. Comparer les angles formés en A aux angles du triangle.

21. — On mène la hauteur AH issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC; les bissectrices des angles BAH et HAC coupent l'hypoténuse en D et E.

1° Évaluer l'angle DAE;

2° Démontrer que les triangles ABE et ACD sont isocèles.

22. — Sur la perpendiculaire menée en C au côté AC d'un triangle rectangle ABC, on porte deux segments CD et CE égaux à l'hypoténuse BC; on joint BD, BE. Démontrer que ces droites sont bissectrices du triangle.

23. — Par le point de rencontre I des diagonales d'un parallélogramme on mène une droite quelconque qui coupe en M et en N deux côtés opposés : démontrer que I est le milieu du segment MN.

24. — Deux parallélogrammes ABCD, ABEF ont en commun le côté AB. Démontrer que les points C, D, E, F sont en général les sommets d'un parallélogramme.

25. — Deux parallélogrammes ABCD, AECF ont en commun la diagonale AC. Démontrer que les points BDEF sont en général les sommets d'un parallélogramme.

26. — Soit ABCD un parallélogramme et EFGH le quadrilatère formé par les bissectrices intérieures des angles du parallélogramme. Que peut-on dire du quadrilatère EFGH?

27. — D'un point M pris sur la base BC d'un triangle isocèle on mène des parallèles aux côtés AB et AC. Démontrer que le périmètre du parallélogramme formé conserve la même valeur quand M décrit le segment BC.

28. — Soit un triangle isocèle ABC ($AB = AC$). Démontrer que la somme des distances d'un point M de BC aux côtés AB et AC demeure la même quand M décrit le segment BC.

29. — Étant donné un rectangle, on mène deux parallèles équidistantes d'une diagonale et limitées aux côtés du rectangle. Démontrer que :

1° Ce sont les côtés opposés d'un parallélogramme;

2° Les autres côtés de ce parallélogramme sont parallèles à la deuxième diagonale du rectangle;

3° Tous les parallélogrammes obtenus de cette façon ont le même périmètre.

30. — D'un point P pris sur le côté commun à deux angles adjacents supplémentaires ABC et ABD, on mène des perpendiculaires aux bissectrices de ces angles.

1° Étudier le quadrilatère formé par les bissectrices et ces perpendiculaires;

2° Démontrer que la diagonale (autre que AB) de ce quadrilatère est parallèle à une certaine droite de la figure.

31. — Il se trouve que dans un triangle, deux médianes sont égales. Qu'en peut-on déduire pour le triangle?

32. — Les hauteurs d'un triangle ABC se coupent en H. Quel est le point de rencontre des hauteurs du triangle HBC?

33. — Soit ABCD un trapèze rectangle en A et D. Démontrer que le milieu du côté oblique BC est équidistant des sommets A et D.

34. — Sur les côtés AB et AC d'un triangle on construit, extérieurement au triangle, les carrés BAEF, CAHK. Démontrer que le segment EH est égal au double de la médiane AM du triangle.

35. — Soit un triangle rectangle ABC ($AC > AB$), AH la hauteur et AO la médiane relatives à l'hypoténuse BC; on mène HD perpendiculaire à AB, HE perpendiculaire à AC; on trace DE qui coupe AH au point S.

1° Qu'est le quadrilatère ADHE? Trouver un segment égal à DE.

2° Que sont les triangles ASE et OAC? En déduire un angle égal à SEA et un angle égal à HCA.

3° Montrer que ces deux angles sont complémentaires. Que peut-on en conclure pour les droites DE et AO?

36. — Étant donné un cercle et deux points diamétralement opposés A et B, on trace deux cordes parallèles AC et BD. Que peut-on dire des points C et D?

37. — Deux cercles se coupent en A et B; par A et B on trace deux droi-

les parallèles CAD et EBF rencontrant le premier cercle en C et E, le second en D et F. Comparer les segments CE et DF. (Plusieurs cas de figure suivant que A, par exemple, est ou non entre C et D.)

38. — Soit B et C les points de contact des tangentes issues d'un point A à un cercle de centre O ; la droite OC et la perpendiculaire menée en A à la tangente AB se coupent en D. Étudier le triangle DOA.

39. — Deux cercles se coupent en A et B. On marque les points C et D diamétralement opposés (dans chaque cercle) au point A.

1° Quelle particularité présentent les points B, C, D?

2° Comparer le segment CD à la distance des centres.

40. — Montrer qu'on peut tracer un cercle tangent aux quatre côtés d'un losange (cercle inscrit).

41. — Soit deux cercles O et O′ tangents extérieurement en A, AT la tangente au point de contact. On trace une droite qui touche les cercles en B et C; elle coupe AT au point I; on joint AB, AC, IO, IO′. Étudier la figure (segments égaux, angles droits).

42. — Soit un demi-cercle de diamètre AB et la demi-droite Ox menée par le centre O perpendiculairement à ce diamètre, et du côté du demi-cercle. Un arc de cercle de centre B passant par A coupe Ox en C; un arc de cercle de centre B passant par O coupe le demi-cercle en D. Démontrer que les trois points B, D, C, sont en ligne droite.

43. — Soit ABC un triangle, AD, BE, CF ses hauteurs qui se coupent en H; on trace le triangle DEF.

1° Que peut-on dire des quatre points BDHF? En déduire un angle égal à FDH?

2° Même question pour les quatre points CDHE et l'angle EDH.

3° Que peut-on dire des quatre points BCEF et des angles ABE et ACF?

4° Quelles sont les bissectrices du triangle DEF?

44. — Soit I le centre du cercle inscrit à un triangle ABC et S le point où la bissectrice intérieure de l'angle A coupe le cercle circonscrit. Démontrer que le triangle SIB est isocèle.

45. — 1° Soit un triangle ABC, BE et CF deux de ses hauteurs; on joint EF ; trouver un angle égal à l'angle B du triangle.

2° Soit un triangle ABC, T′T la tangente en A au cercle circonscrit; trouver un angle égal à l'angle B du triangle.

3° Rapprocher les réponses précédentes et en déduire une propriété de la figure.

Lieux Géométriques.

(Les premiers des exemples qui suivent ont été rencontrés dans le cours.)

46. — Lieu des points qui sont à une distance donnée d'un point fixe.

47. — Lieu des points qui sont à une distance donnée d'une droite fixe.

48. — Lieu des points qui sont à une même distance (non précisée) de deux points fixes A et B.

49. — Lieu des points qui sont à une même distance (non précisée) de deux droites concourantes.

50. — Lieu des points qui sont à une même distance de deux droites parallèles.

51. — Lieu du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle ayant pour hypoténuse un segment fixe BC.

52. — Un cercle mobile de rayon donné R passe par un point fixe; lieu de son centre.

53. — Un cercle mobile de rayon donné R est tangent à une droite xy. Lieu de son centre.

54. — Un cercle mobile de rayon donné r est tangent extérieurement à un cercle fixe O de rayon R. Lieu de son centre.

54 *bis*. — Même question en remplaçant extérieurement par intérieurement.

55. — Lieu des centres des cercles qui sont tangents à la fois :

1° à deux droites parallèles;

2° à deux droites concourantes.

56. — Soit A un point mobile sur un cercle fixe O; sur la tangente en A on porte une longueur invariable AM. Lieu du point M.

57. — Lieu des points M d'où on peut mener à un cercle fixe deux tangentes faisant un angle de grandeur donnée.

58. — Les extrémités d'un segment AB de grandeur invariable glissent sur les côtés d'un angle droit XOY. Soit D le quatrième sommet du rectangle ayant pour côtés OA et OB. Quel est le lieu géométrique du point D? Quel est le lieu du milieu N du segment AB.

59. — Soit ABC un triangle isocèle (AB = AC). On porte deux segments égaux, BD sur le côté BA, CE sur le prolongement du côté AC; on joint DE et on achève le parallélogramme qui a pour côtés BD et DE. Lieu géométrique du quatrième sommet M quand le point D décrit le segment AB.

60. — Autour d'un point P on fait pivoter une droite PAB qui coupe en A et B un cercle donné. Quel est le lieu du milieu M de la corde AB? (Trois figures suivant la position du point P par rapport au cercle.)

Constructions.

61. — Construire un cercle de rayon donné R = 15^{mm} passant par un point A et tangent à une droite donnée xy.

62. — Étant donné deux cercles, O de rayon R = 40^{mm}, et O′ de rayon R′ = 28^{mm}, tracer un cercle de rayon 15^{mm} tangent extérieurement à chacun d'eux. — On fera d'abord la figure en supposant la distance OO′ des centres égale à 50^{mm}, puis, laissant les autres données invariables on examinera ce qui se passe quand OO′ augmente à partir de zéro.

63. — Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse BC et la hauteur AH.

64. — Construire un triangle connaissant le côté BC, la hauteur AH et la médiane AM.

65. — Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse a, et la somme s des deux autres côtés. (Faire un croquis sur lequel on mettra en évidence la somme donnée.)

66. — Construire un trapèze connaissant les quatre côtés. (Couper le trapèze en un parallélogramme et un triangle et voir ce qui est connu dans ce triangle.)

67. — Construire un trapèze rectangle connaissant les bases et le côté perpendiculaire.

68. — Construire un trapèze rectangle connaissant les bases et le côté oblique.

69. — Application : construire les tangentes communes à deux cercles (1° tangentes extérieures; 2° tangentes intérieures).

70. — On donne deux points AB, et une droite *xy*. Trouver sur la droite *xy* un point M tel que la somme AM + MB soit la plus courte possible; on traitera successivement les deux cas suivants :

1° A et B sont de part et d'autre de *xy*;

2° A et B sont d'un même côté de *xy* (se ramener au premier cas en remplaçant le point A par un point C tel que, pour *tout* point P de *xy*, PC soit égal à PA).

71. — On donne deux droites qui se coupent en O et un point S. Mener par S une droite qui détermine sur les droites données deux segments OA et OB égaux.

72. — Construire un triangle connaissant les côtés AB, AC et la médiane AM issue de A.

73. — Trouver sur l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC un point M tel qu'en menant de ce point les perpendiculaires aux côtés de l'angle droit on forme un carré.

74. — A et B étant deux points donnés, trouver une droite dont A et B soient équidistants. (Deux cas, suivant que la droite laisse ou non les deux points d'un même côté.)

74 *bis*. — Trouver une droite dont trois points donnés A, B, C soient équidistants.

75. — Étant donné un cercle et un point S intérieur à ce cercle, on demande de tracer une corde ayant pour milieu ce point.

76. — Etant donné un cercle et un point S, mener par ce point une sécante sur laquelle le cercle découpe une corde de longueur donnée.

77. — Étant donné un cercle et un point S, inscrire dans le cercle un triangle équilatéral dont un côté (ou son prolongement) passe par le point S.

78. — Montrer que dans un cercle l'arc *n'est pas* proportionnel à la corde : marquer deux arcs consécutifs égaux et tracer les trois cordes; quand l'arc est doublé, sa corde est-elle doublée?

79. — Exercice analogue. Montrer que dans un cercle la corde *n'est pas inversement* proportionnelle à la distance du centre à la corde.

80. — Un triangle a pour côtés (unité : cm.) AB = 24, AC = 17, BC = 13. Evaluer les segments déterminés sur ces côtés par les points de contact du cercle inscrit. (Calculer la somme de ces *trois* segments, puis la somme de deux d'entre eux.)

81. — Mêmes données. Evaluer la distance du sommet A aux points F et E où le cercle exinscrit dans l'angle A touche respectivement les droites AB et AC. (On pourra rabattre BF et CE sur le côté BC.)

DEUXIÈME PARTIE

SIMILITUDE ET RELATIONS MÉTRIQUES

---

§ 1. — POINTS QUI PARTAGENT UN SEGMENT DANS UN RAPPORT DONNÉ

Rapport de deux segments.

384. — Rappelons ce qu'on appelle **rapport** de deux **segments.**

Dire que le rapport de AB à CD est $\frac{8}{5}$, c'est dire que pour avoir AB, on divise CD en 5 parties égales et qu'on porte bout à bout 8 de ces parties. Ceci revient à dire qu'un certain segment est contenu 5 fois dans CD et 8 fois dans AB.

On écrira $\left(\frac{AB}{CD}\right) = \frac{8}{5}$.

Inversement $\left(\frac{CD}{AB}\right) = \frac{5}{8}$.

Fig. 198.

Si CD est l'unité, AB est mesuré par le nombre $\frac{8}{5}$. Donc :

385. — *On appelle* **rapport** *du segment* AB *au segment* CD *le nombre qui mesure le segment* AB *quand on prend le segment* CD *pour unité.*

On démontre que :

386. — *Le rapport de deux segments est égal au quotient exact des nombres qui les mesurent avec une même unité,* — par exemple tous deux en millimètres.

Nous regarderons le symbole $\frac{AB}{CD}$ comme représentant aussi bien

le rapport de AB à CD, que le quotient de la longueur AB (nombre qui mesure AB) par la longueur CD.

Exercices. 387. — On donne un segment a; construire : 1° le segment x tel que $\frac{x}{a}=\frac{3}{4}$; 2° le segment y tel que $\frac{a}{x}=\frac{7}{4}$ (partager a en un certain nombre de parties égales).

388. — Tracer un segment AB de 48^{mm}; tracer : 1° le segment CD tel que $\frac{CD}{AB}=\frac{11}{8}$; 2° le segment EF tel que $\frac{AB}{EF}=\frac{13}{12}$. (On opérera par le calcul.)

389. Évaluer le rapport de deux segments. — Les porter bout à bout en AB et BC sur une bande de papier. Sur un cahier dont la réglure est suffisamment serrée, placer la bande de manière que BC couvre 10 divisions. Si AB couvre un peu plus de 23 divisions et moins de 24, le rapport de AB à BC est compris entre $\frac{23}{10}$ et $\frac{24}{10}$, c'est-à-dire entre 2,3 et 2,4.

Points partageant un segment dans un rapport donné.

390. — Soit un segment AB et un point quelconque M de la droite AB.

On dira que le point M *partage* le segment AB, même s'il lui est

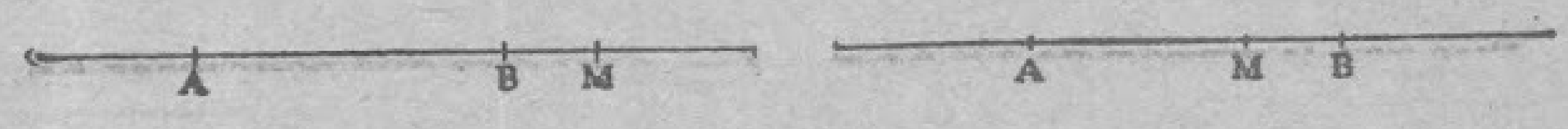


Fig. 199.

extérieur, et on distinguera en disant que le point M partage le segment AB *intérieurement* ou *extérieurement*.

391. Théorème. — *Sur la droite indéfinie qui joint deux points* A *et* B, *il existe deux points partageant le segment* AB (*l'un intérieurement, l'autre extérieurement*) *dans un rapport donné.*

Il y a une exception : *quand le rapport est égal à 1, le problème n'admet qu'une solution : le milieu de* AB.

Cherchons par exemple les points M tels que l'on ait $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$.

1° *Existe-t-il un point* M *entre* A *et* B?

Fig. 200.

Il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{cases} \frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}, \\ MA+MB=AB \end{cases}$$

D'où :
$$\frac{MA}{2}=\frac{MB}{3}=\frac{MA+MB}{2+3}=\frac{AB}{5}.$$
$$\begin{cases} MA=\frac{2AB}{5}, \\ MB=\frac{3AB}{5}. \end{cases}$$

Le point M existe et est unique.

2° *Existe-t-il un point* M′ *sur la demi-droite* Ax?

Fig. 201.

Il faut et il suffit qu'on ait :

$$\begin{cases} \frac{M'A}{M'B}=\frac{2}{3}, \\ M'B-M'A=AB. \end{cases}$$

D'où
$$\frac{M'A}{2}=\frac{M'B}{3}=\frac{M'B-M'A}{3-2}=\frac{AB}{1}.$$
$$\begin{cases} M'A=2.AB, \\ M'B=3.AB. \end{cases}$$

Le point M′ existe et est unique.

3° *Existe-t-il un point* M″ *sur la demi-droite* By?

Fig. 202.

Il faut et il suffit qu'on ait

$$\begin{cases} \frac{M''A}{M''B}=\frac{2}{3}, \\ M''A-M''B=AB. \end{cases}$$

C'est impossible car $\frac{M''A}{M''B}$, qui est supérieur à 1, ne peut pas être égal à $\frac{2}{3}$.

Ce raisonnement est général et s'applique à toute valeur du rapport donné, différente de 1.

392. — Constructions des points M et M′.

Pour M, diviser AB en 5 parties égales et compter à partir de A, deux de ces parties.

Pour M′, reporter deux fois la longueur AB au delà du point A

393. Cas particulier. — *Le rapport donné est* 1.

M est au milieu de AB. — M′ n'existe plus.

394. Exercice. — Reprendre le même raisonnement avec $\frac{MA}{MB} = 2$.

On trouve $\begin{cases} MA = \frac{2AB}{3} \\ MB = \frac{AB}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} M'A = 2AB \\ M'B = AB. \end{cases}$

§ 2. — SEGMENTS DÉTERMINÉS SUR DEUX DROITES QUELCONQUES PAR DES DROITES PARALLÈLES

395. Théorème de Thalès[1]. — *Si plusieurs droites sont parallèles, les segments correspondants qu'elles déterminent sur deux sécantes sont proportionnels.*

Hyp. : AA′, BB′, CC′, DD′, sont parallèles.

Concl. : $\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$.

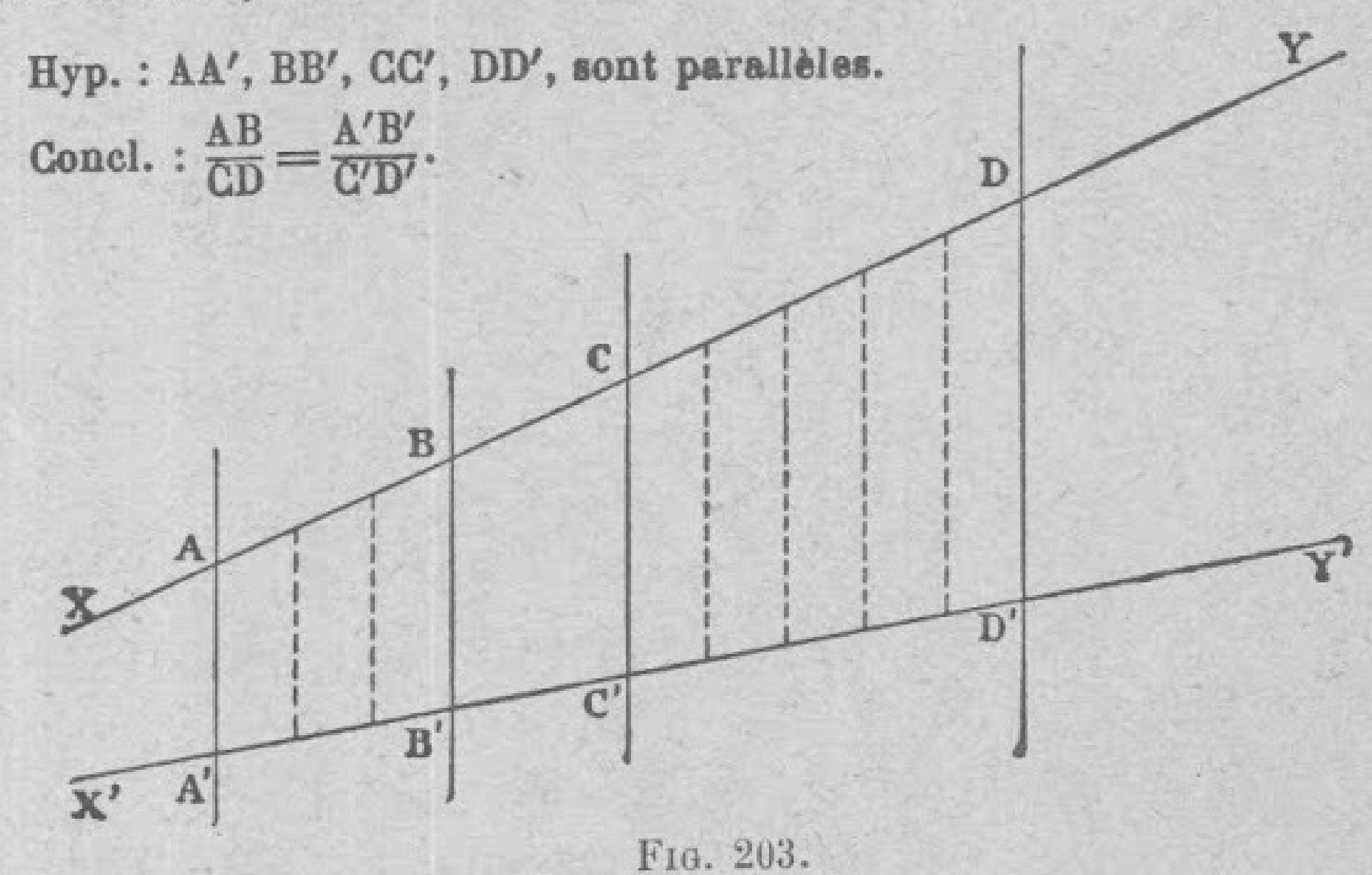


Fig. 203.

Soit deux droites XY et X′Y′ coupées par la droite AA′; B étant un point quelconque de XY, on en déduit le point B′ de X′Y′ en menant par B la parallèle à AA′. De même, C′ étant un point de X′Y′ on en déduit le point C de XY en menant par C′ la parallèle à AA′. On fait ainsi correspondre les points de XY aux points de X′Y′ et les segments AB, BC, ... de l'une à des segments A′B′, B′C′, ... de l'autre.

Je vais montrer que les segments de la 1re sécante XY, et les segments de la 2e sécante sont *proportionnels*, ce qui veut dire : si on

(1) Thalès, philosophe grec, né à Milet, Asie Mineure (640-548 av. J.-C.).

prend deux segments à volonté, AB et CD par exemple, de l'une, et les segments correspondants A′B′ et C′D′ de l'autre, les rapports $\left(\frac{AB}{CD}\right)$ et $\left(\frac{A'B'}{C'D'}\right)$ sont égaux.

Supposons, par exemple, que $\left(\frac{AB}{CD}\right) = \frac{3}{5}$. C'est dire qu'un certain segment est contenu 5 fois dans CD et 3 fois dans AB. Indiquons-le sur la figure et par les points de division, menons des parallèles à AA′. Ces parallèles déterminent sur A′B′ et sur C′D′ des segments égaux (n° 294); il y en a évidemment 5 sur C′D′ et 3 sur A′B′.

Donc $\left(\frac{A'B'}{C'D'}\right) = \frac{3}{5}$.

On a donc bien $\left(\frac{AB}{CD}\right) = \left(\frac{A'B'}{C'D'}\right)$.

396. Remarque I. — Le théorème est indépendant de la position des parallèles par rapport aux deux sécantes (*fig.* 204.)

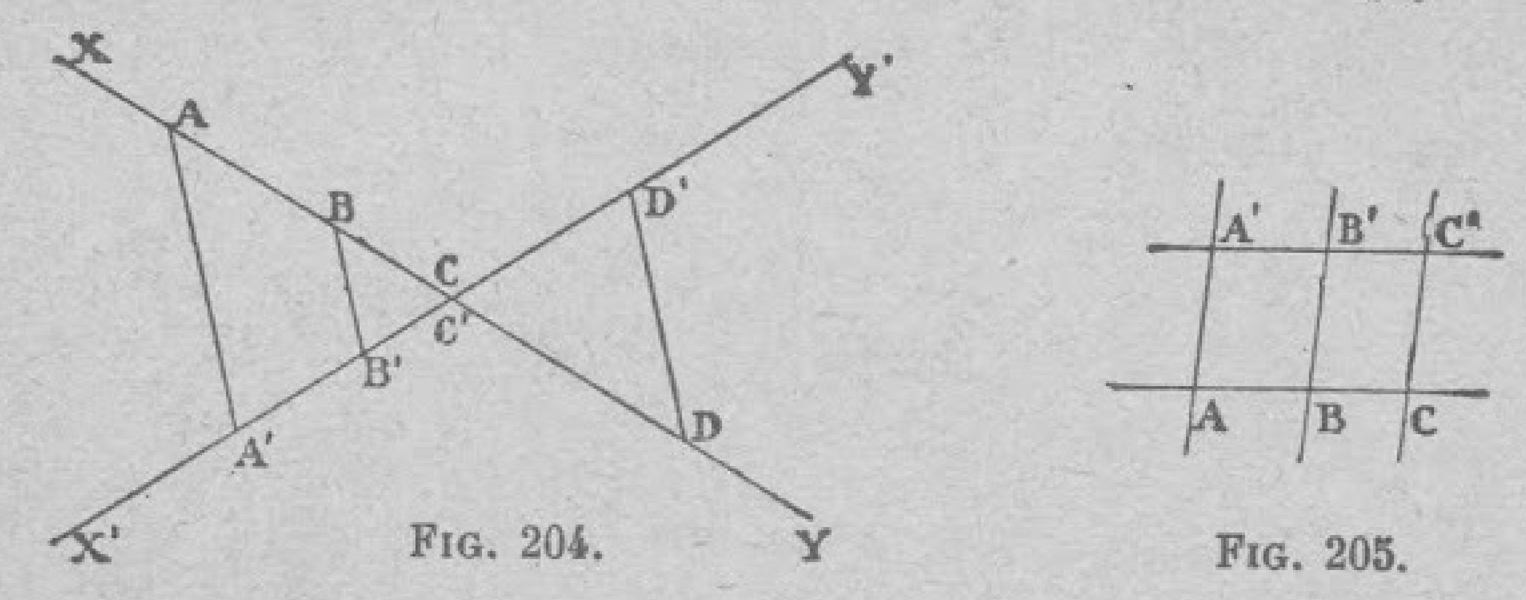


Fig. 204. Fig. 205.

Il est encore vrai si les sécantes sont parallèles (*fig.* 205), car les segments correspondants sont alors égaux.

397. Remarque II. — Les nombres qui mesurent les segments déterminés sur X′Y′ et les nombres qui mesurent les segments déterminés sur XY sont proportionnels :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'D'}{AD} = \ldots$$

398. Exercice. — Faire une figure analogue à la figure 203.

Données (cm).	Inconnues.
AB = 8	B′C′ =
BC = 10	CD =
A′B′ = 12	
C′D′ = 9	

399. Application du théorème de Thalès au trapèze. — EF étant une parallèle aux bases, les segments AE, ED, AD, sont proportionnels aux segments BF, FC, BC.

Exercices sur un trapèze. — Soit un trapèze ABCD, EF une parallèle aux bases.

400. — Données (cm).
AE = 15
ED = 28
BC = 28,5

Inconnues.
BF =
FC =

Fig. 206.

401. Données $\begin{cases} AE = 15 \\ FC = 8,4. \end{cases}$ Il se trouve que ED = BF.

Calculer AD et BC.

402. Réciproque du théorème de Thalès. — Supposons que EA soit les $\frac{2}{3}$ de ED et que FB soit les $\frac{2}{3}$ de FC. Si on mène par E la parallèle aux bases, elle doit (théorème de Thalès) passer par F. D'où le théorème :

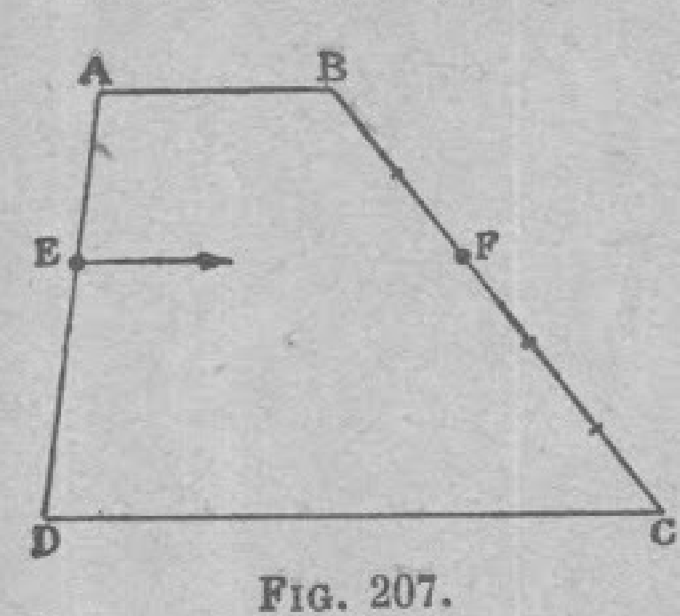
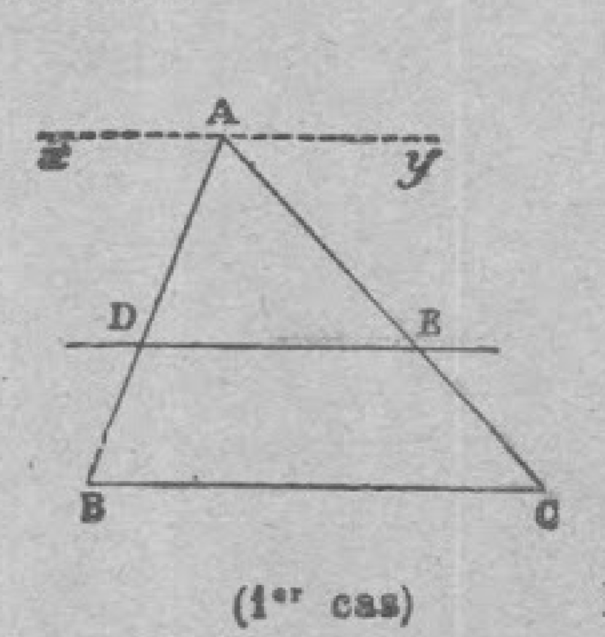


Fig. 207.

Si une droite partage les côtés non parallèles d'un trapèze (tous deux intérieurement, ou tous deux extérieurement) dans le même rapport, elle est parallèle aux bases.

Application du théorème de Thalès au triangle. — L'une des parallèles sera la droite xy menée par A parallèlement au côté BC. On voit ainsi apparaître le théorème direct et le théorème réciproque suivants :



(1er cas)

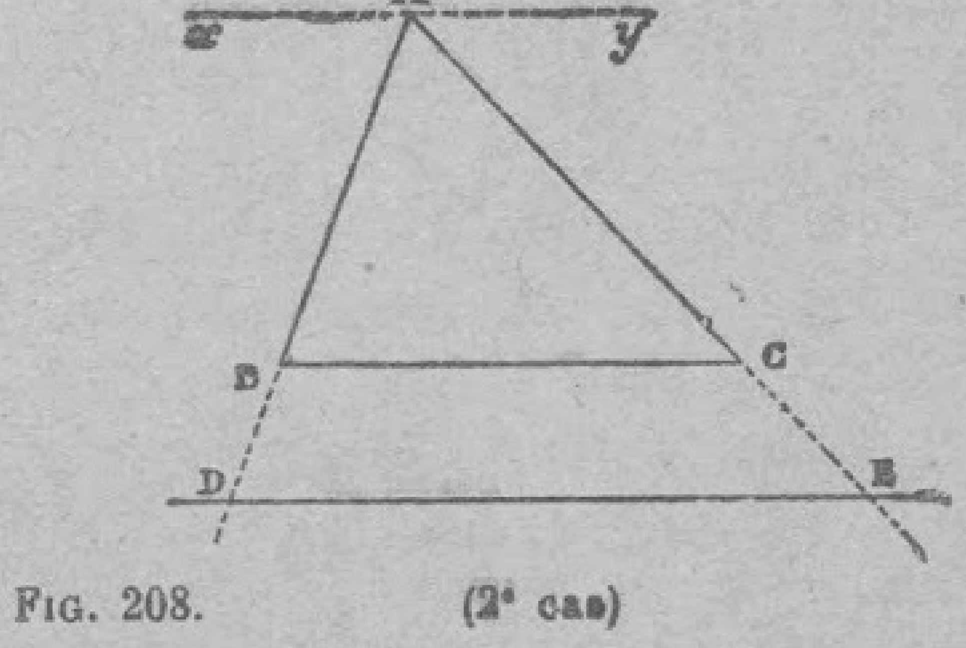


Fig. 208. (2e cas)

403. Théorème. — *Toute parallèle à un côté d'un triangle détermine sur les deux autres côtés (ou sur leurs prolongements) des segments proportionnels* (3 cas de figure p. 102-103).

DE // BC | $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC}$
A, B, D et A, C, E pareillement placés.
⟶ Th. direct.
⟵ Th. réciproque.

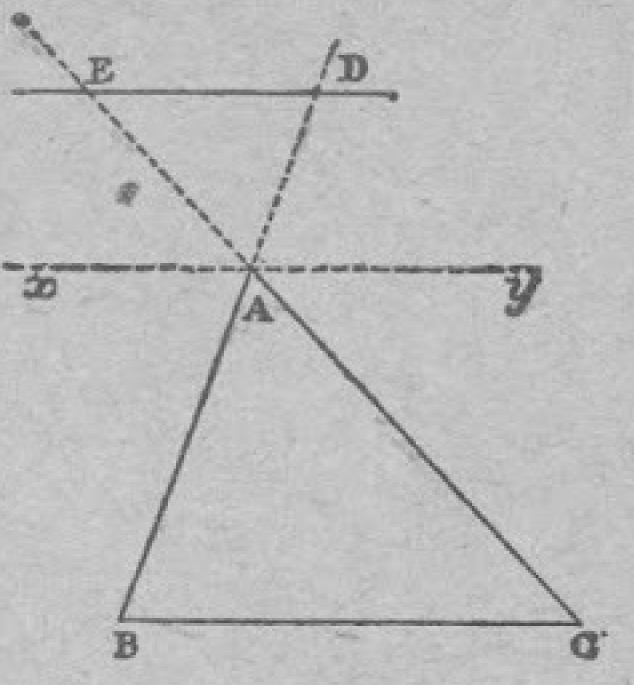


Fig. 208 (3e cas).

404. Théorème réciproque. — *Si une droite détermine sur deux côtés d'un triangle (ou sur leurs prolongements) des segments proportionnels et pareillement placés, elle est parallèle au 3e côté.*

405. Remarque I. — On aurait pu aussi bien considérer les rapports $\frac{AD}{AB}$ et $\frac{AE}{AC}$.

406. Remarque II. — Les segments AD, DB, AB sont proportionnels aux segments AE, EC, AC.

407. Exercice. — Complétez les égalités $\frac{AD}{DB} =$; $\frac{AE}{AD} =$; $\frac{AB}{DB} =$.

Constructions.

408. I. **Partage proportionnel.** — *Partager un segment AB proportionnellement à trois segments donnés : m, n, p.*

Soit AB le segment donné. Sur une droite menée par A, on porte, à partir de A et bout à bout, les trois segments donnés. Soient D, E, F les points obtenus. On mène par D, E les parallèles à FB ; elles coupent AB aux points G, H cherchés.

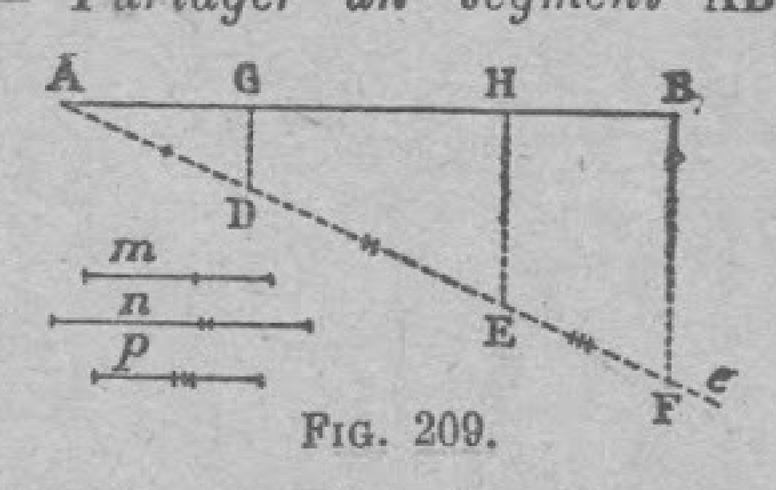


Fig. 209.

$$\frac{AG}{m} = \frac{GH}{n} = \frac{HB}{p}.$$

409. Exercice. — Partager le nombre 120 proportionnellement aux trois nombres 3,4, 7 et 1,8
1° Par le calcul ;
2° Au moyen d'une construction. Comparer les résultats à ceux du calcul.

410. Cas particulier. — *Partager un segment,* **intérieurement et extérieurement,** *dans un rapport* $\frac{p}{q}$ *(p et q étant des segments donnés, ou des nombres donnés).* Sur une droite illimitée issue

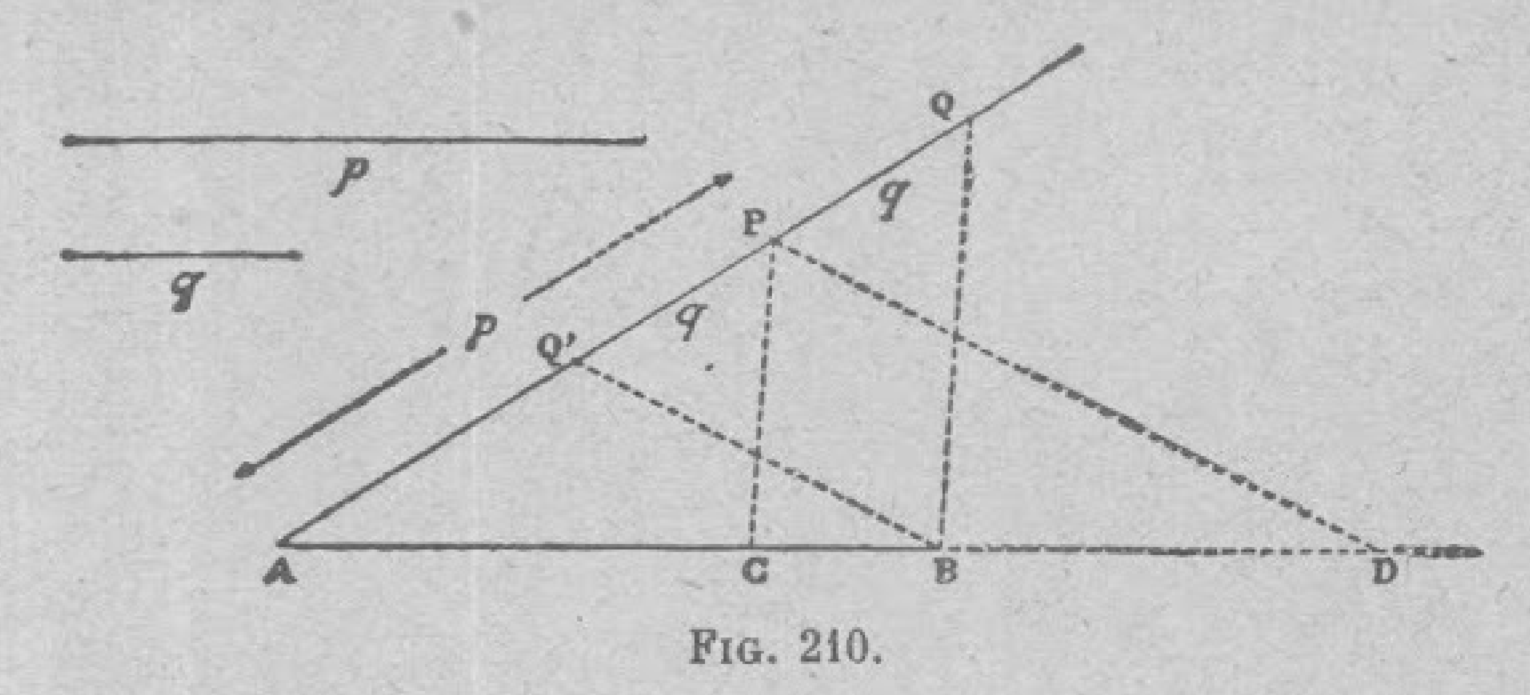


FIG. 210.

de A (*fig.* 210), on porte $AP = p$, $PQ = PQ' = q$. On mène par P les parallèles à BQ, BQ'. On obtient les points cherchés, C et D.

411. II. Quatrième proportionnelle. (*Règle de trois.*)

Construire la 4ᵉ proportionnelle à trois segments donnés (ou à 3 nombres donnés).

Soient *a*, *b*, *c* les segments donnés; *x* le segment cherché défini par

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}, \qquad \text{ou par} \qquad x = \frac{bc}{a}.$$

FIG. 211 et 212.

Traçons un angle (*fig.* 211); portons sur l'un des côtés $OA = a$,

$AB = b$, et de l'autre côté $OC = c$. Menons par B la parallèle à AC, rencontrant l'autre côté en D. CD est le segment cherché.

On peut aussi (*fig.* 212) porter *a* et *b* tous deux à partir du sommet.

412. — Segments déterminés par une bissectrice d'un triangle sur le côté opposé.

I. Tracez la **bissectrice** AD, sa **parallèle** BE; traduisez les mots soulignés par des égalités d'angles; en déduire deux longueurs égales; traduire ensuite le parallélisme par une **proportion** qu'on exprimera au moyen de segments appartenant au triangle : on trouvera $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

II. Reprenez les mêmes constructions et les mêmes déductions avec une bissectrice extérieure.

FIG. 213.

On aboutit donc à la proposition suivante :

Théorème. — *La bissectrice intérieure (ou extérieure) d'un angle d'un triangle partage intérieurement (ou extérieurement) le côté opposé en segments proportionnels aux côtés adjacents.*

Ce théorème fournit la solution des problèmes suivants :

Problèmes. 413. — Construisez un triangle ayant pour côtés $AB = 5^{cm}$, $AC = 7^{cm}$, $BC = 9^{cm}$; construisez la bissectrice intérieure de l'angle A; *calculez* DB, DC. Vérifiez sur la construction.

414. — Construisez un triangle ayant pour côtés $AB = 8^{cm}$, $AC = 5^{cm}$, $BC = 4^{cm},5$. Construisez la bissectrice extérieure AD de l'angle A; calculez DB, DC. Vérifiez sur la construction.

Double application du théorème de Thalès au triangle.

415. — D étant un point quelconque pris sur la droite AB (fig. 214), le théorème de Thalès nous permet d'avoir des rapports égaux à $\frac{AD}{AB}$:

En menant DE parallèle à BC $\quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}.$

En menant DF parallèle à AC $\quad \frac{AD}{AB} = \frac{CF}{CB}.$

Donc $\quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{CF}{CB}.$

Or $CF = ED$ (côtés opposés d'un parallélogramme). Donc :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{ED}{CB}.$$ (côtés du tr. ADE). (côtés du tr. ABC).

On a ainsi le théorème suivant :

Théorème. — *Toute parallèle* (**DE**) *à un côté d'un triangle forme avec les deux autres côtés un nouveau triangle dont les côtés sont proportionnels à ceux du premier.*

REMARQUE. — Les deux triangles ADE et ABC ont leurs angles

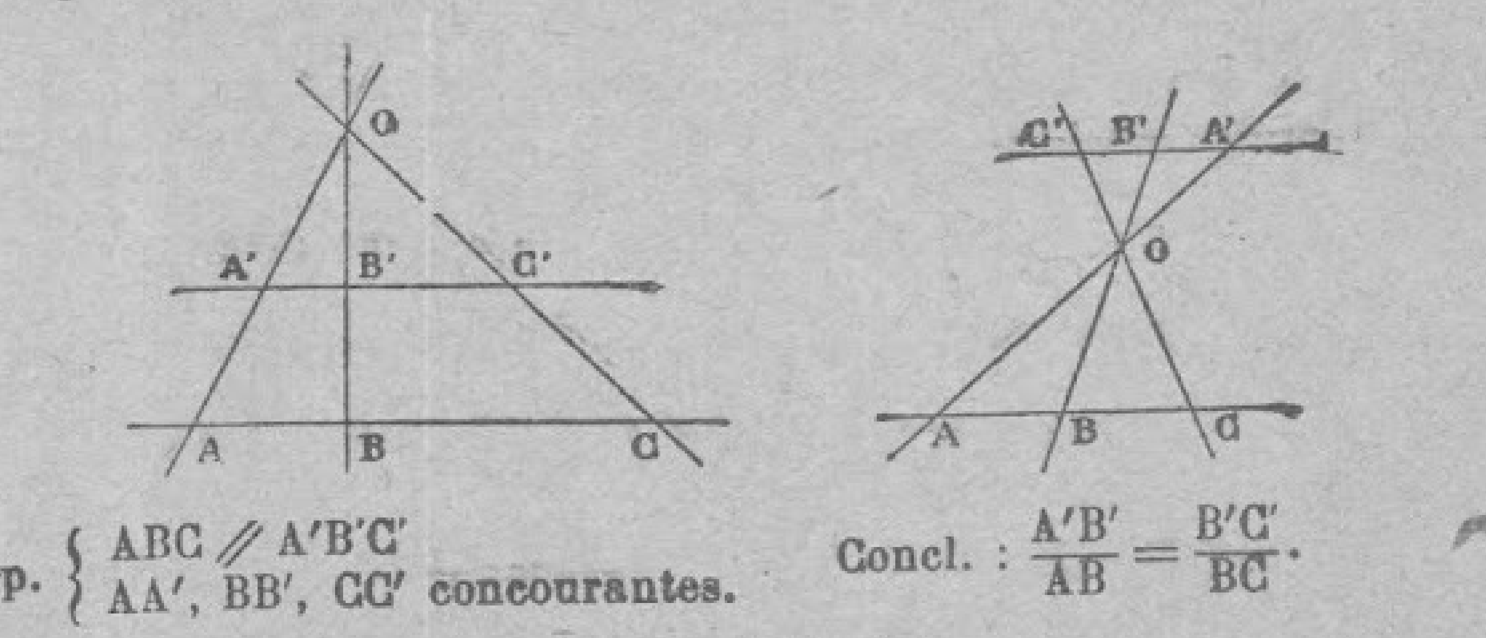
Hyp. : DE // BC.

Concl. : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$.

FIG. 214.

égaux chacun à chacun (en donner la raison) et on constate que les côtés qui se correspondent sont adjacents à des angles égaux.

416. Exercice. — Plusieurs droites concourantes déterminent sur deux droites parallèles des segments proportionnels.



Hyp. { ABC // A'B'C' ; AA', BB', CC' concourantes. Concl. : $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$.

FIG. 215 et 215 *bis*.

Exercices sur le trapèze.

417. — Soit un trapèze ABCD, EF une parallèle aux bases. On donne

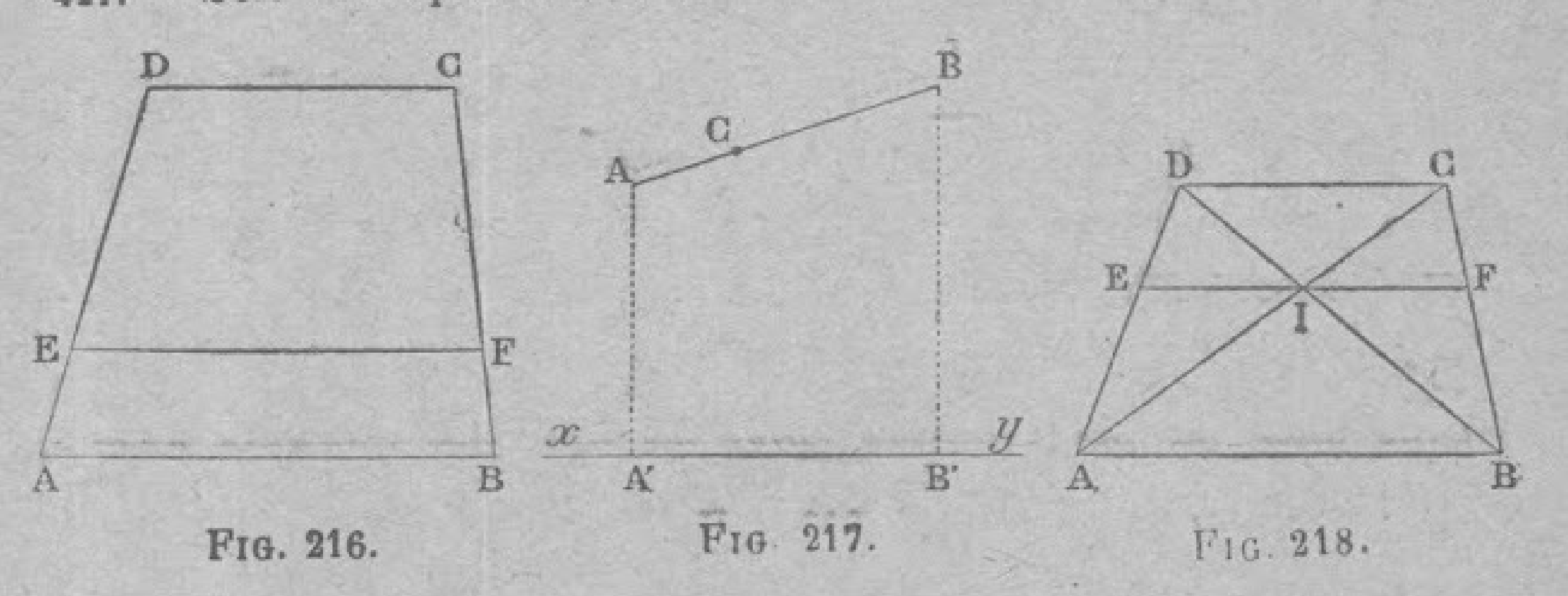


FIG. 216. FIG. 217. FIG. 218.

(en cm.) : AB = 42, DC = 28, AE = 10, ED = 25 et on demande de calculer EF. (Mener par un sommet la parallèle à un côté, formant ainsi un parallélogramme et un triangle ; méthode déjà indiquée à l'exercice 66, page 95.)

417 *bis*. — Soit un segment AB et le point C qui le partage intérieurement dans le rapport $\frac{1}{2}$ et soit xy une droite ne coupant pas le segment. On connait (unité : cm.) les distances des points A et B à cette droite : $AA' = 25$, $BB' = 34$. On demande de calculer la distance du point C à la droite xy. (Même méthode que pour l'exercice précédent.)

418. — Soit un trapèze ABCD et EF la parallèle aux bases menée par le point de rencontre I des diagonales (fig. 218) ; évaluer les rapports $\frac{EI}{AB}, \frac{IF}{AB}$ en vue de comparer les segments EI, IF.

419. Construction. — *Construire les points qui partagent un segment* AB *dans un rapport donné* $\frac{p}{q}$.

Ce problème a déjà été résolu au nº 410. Nous allons en donner une nouvelle solution.

On mène par A et B deux droites parallèles (*fig.* 219) sur lesquelles

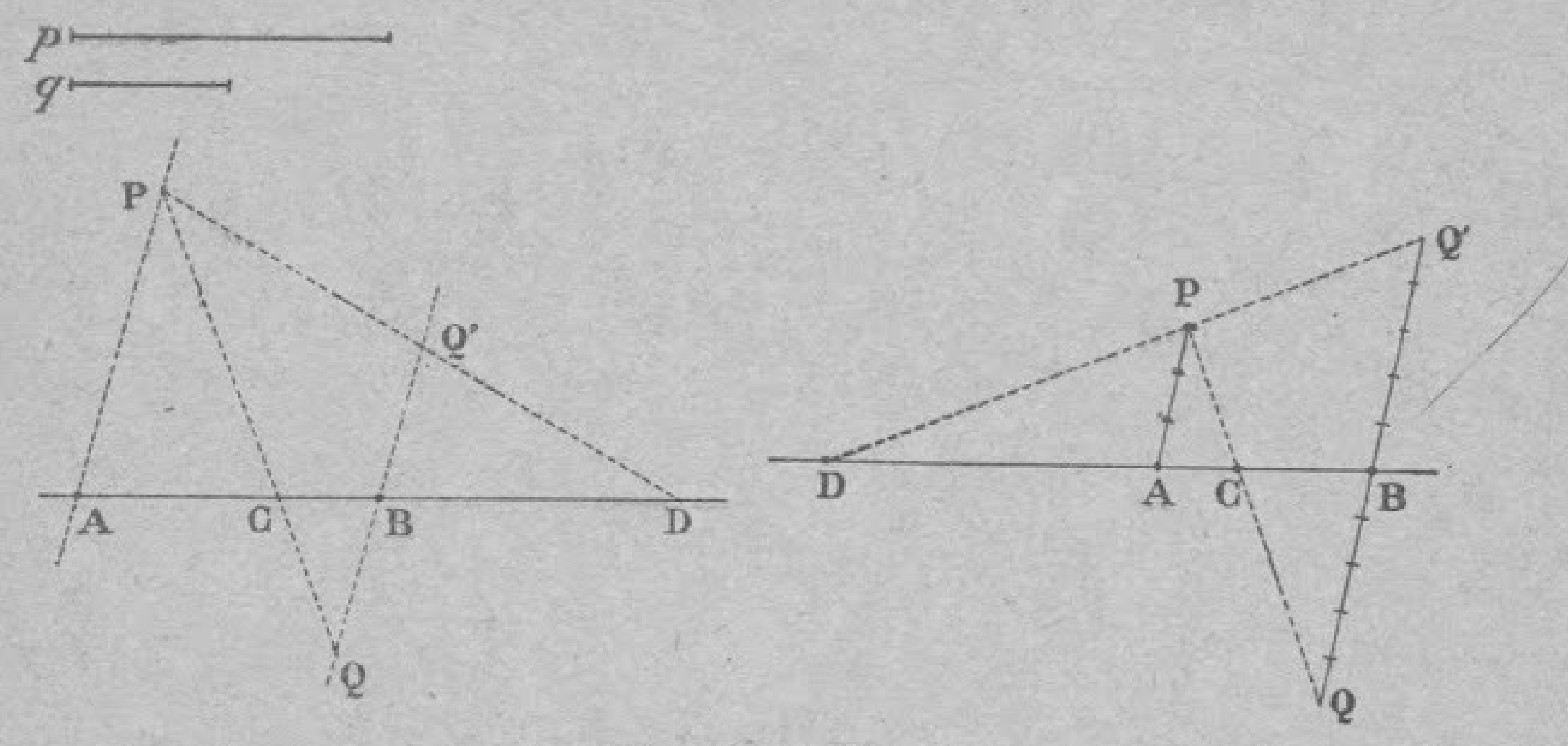


FIG. 219 et 220.

on prend $AP = p$, $BQ = BQ' = q$. Les droites PQ et PQ' coupent la droite AB aux points cherchés (triangles CAP et CBQ, DAP et DBQ').

Même construction quand le rapport est donné numériquement, $\frac{3}{5}$ par exemple (*fig.* 220). On porte $AP = 3$ fois un segment arbitraire, $BQ = BQ' = 5$ fois ce segment.

§ 3. — TRIANGLES SEMBLABLES

420. Définition. — On dit que deux triangles sont **semblables** quand on peut les placer de façon qu'ils aient un angle commun, les côtés opposés à cet angle étant parallèles.

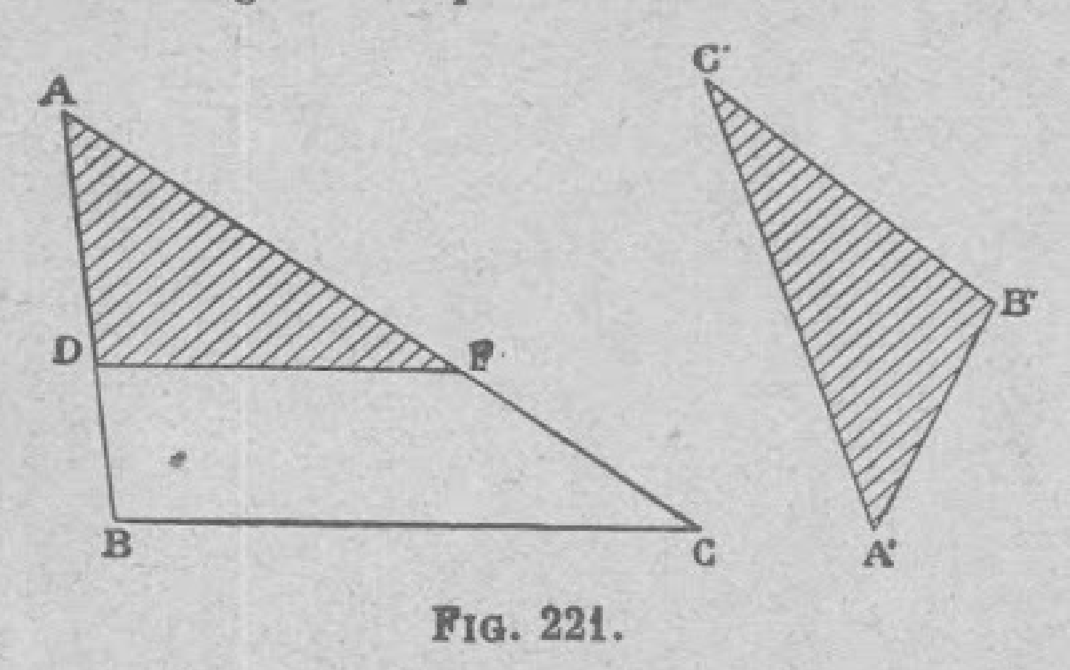


FIG. 221.

EXEMPLE : ABC et A'B'C', calqué en ADE.

Le théorème 415 et la remarque qui suit conduisent au **théorème** suivant :

421. Théorème. — *Si deux triangles sont semblables, ils ont leurs angles égaux chacun à chacun, et les côtés homologues*(1) *proportionnels.*

En d'autres termes, on a

$$\hat{A} = \hat{A}' \quad \hat{B} = \hat{B}' \quad \hat{C} = \hat{C}' \qquad \text{et} \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Le rapport des côtés homologues s'appelle **rapport de similitude.**

422. Exercice. — Construire un triangle semblable à un triangle donné, dans un rapport de similitude donné, $\frac{2}{3}$ par exemple, — ou $\frac{7}{3}$.

Utiliser la définition.

ADE étant obtenu, on peut le transporter (calque) en un autre endroit du plan, — ou construire un triangle égal en employant l'une des trois constructions fondamentales (nos 152 et suiv.) correspondant aux cas d'égalité.

Inversement étant donné deux triangles, nous allons voir comment s'assurer s'ils sont semblables. On obtient les théorèmes suivants, qu'on appelle *cas de similitude.*

(1) Les côtés homologues, ou correspondants, sont ceux qui sont adjacents à des angles respectivement égaux.

Cas de similitude des triangles.

423. 1er Cas. — *Si deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun ils sont semblables.*

Hyp. $\begin{cases} A' = A, \\ B' = B. \end{cases}$

Concl. : Tr. A'B'C' semblable à Tr. ABC.

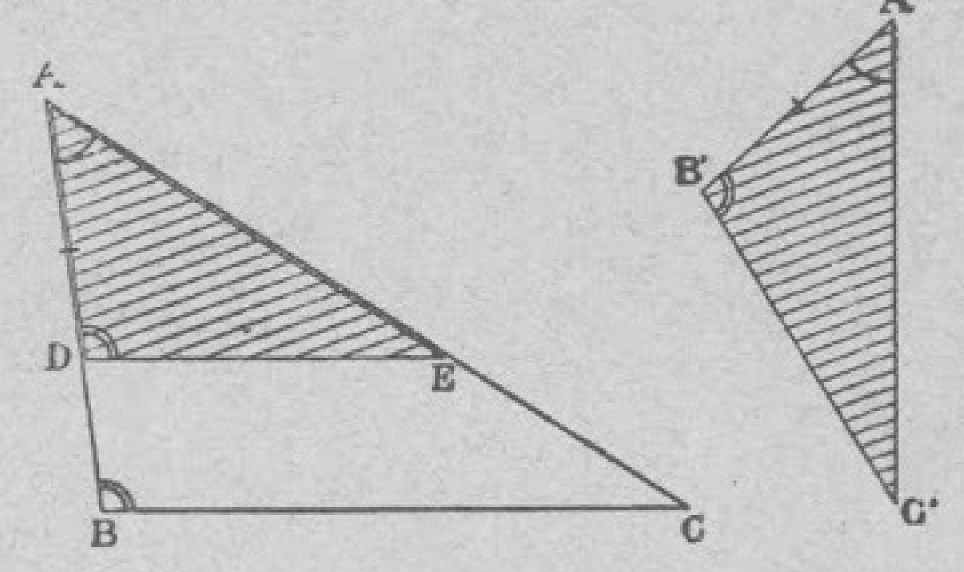


FIG. 222.

En effet calquons A'B'C' et portons-le sur le triangle ABC de façon que les angles égaux A et A' coïncident, A'B' venant en AD sur la droite AB, et A'C' en AE sur la droite AC.

Les angles B' (ou D) et B étant égaux et placés dans la position de correspondants, la droite DE est parallèle à BC, et les triangles sont semblables.

424. 2e Cas. — *Si deux triangles ont un angle égal compris entre côtés proportionnels ils sont semblables.*

Hyp. $\begin{cases} A' = A, \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}. \end{cases}$

Concl. : Tr. A'B'C' semblable à Tr. ABC.

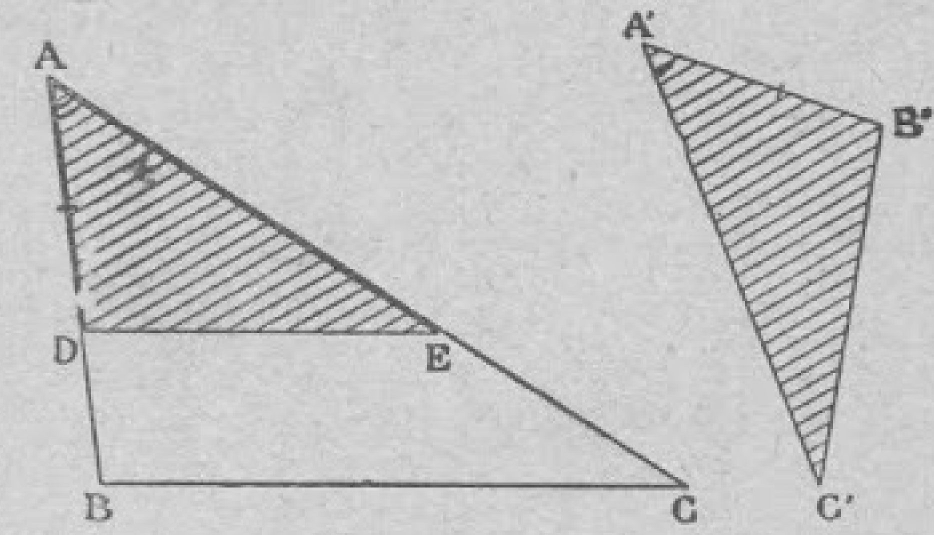


FIG. 223.

En effet calquons A'B'C' et portons-le sur le triangle ABC de façon que les angles égaux A et A' coïncident, A'B' venant en AD sur la droite AB, et A'C' en AE sur la droite AC.

AD et AE étant proportionnels à AB et AC, la droite DE est parallèle à BC (n° 404) et les triangles sont semblables.

425. 3e Cas. — *Si deux triangles ont les trois côtés proportionnels, ils sont semblables.*

Soit par exemple un triangle ABC et un deuxième triangle A'B'C' tels que

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}.$$

Si la valeur commune de ces rapports est par exemple $\frac{5}{3}$, c'est que les côtés du triangle A'B'C' sont $\frac{5}{3}$AB, $\frac{5}{3}$BC, $\frac{5}{3}$CA.

Hypothèse :
$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$.

Conclusion :
Tr. A'B'C' semblable à Tr. ABC.

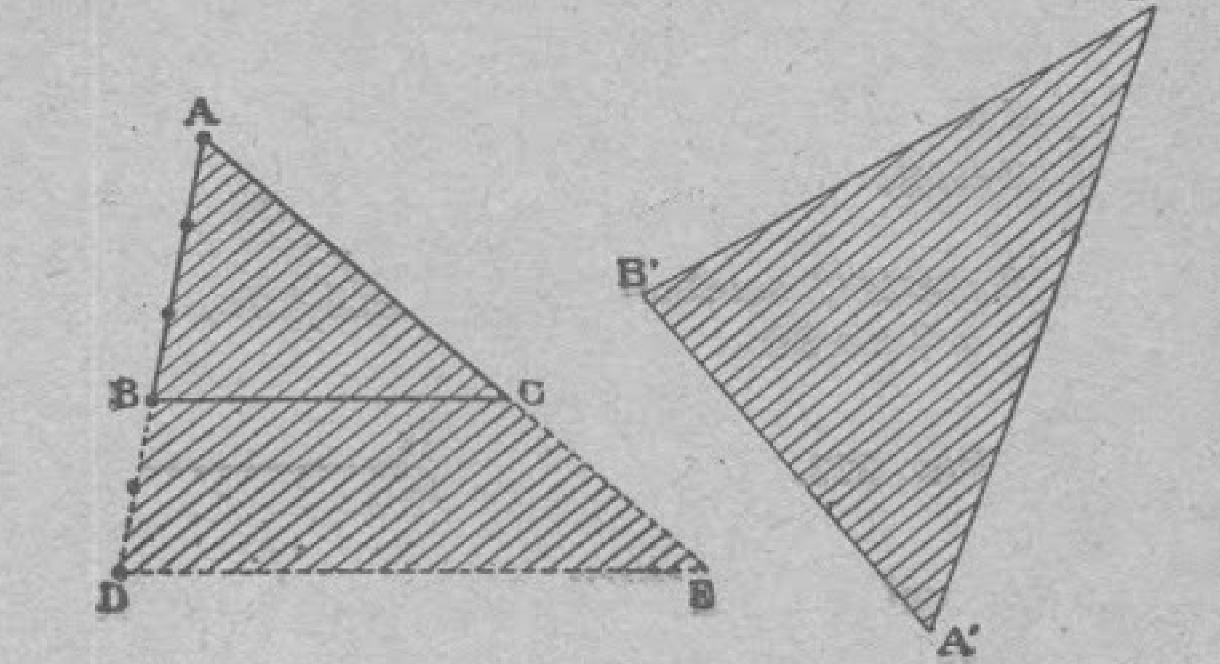


Fig. 224.

Soit D le point obtenu en portant sur le côté AB, à partir de A, les $\frac{5}{3}$ de ce côté; menons DE parallèle à BC; le triangle ADE est semblable à ABC dans le rapport $\frac{5}{3}$. Ses côtés sont donc $\frac{5}{3}$AB, $\frac{5}{3}$BC, $\frac{5}{3}$CA, donc égaux à ceux de A'B'C'. A'B'C' et ADE sont donc superposables.

Cas spécial aux triangles rectangles.

426. — *Si deux triangles rectangles ont l'hypoténuse et un côté de l'angle droit proportionnels, ils sont semblables.*

Répéter la démonstration du 3ᵉ cas, en s'appuyant sur le 2ᵉ cas d'égalité des triangles rectangles.

427. — Conséquences des cas de similitude.

1° *Si deux triangles isocèles ont même angle au sommet, ou même angle à la base, ils sont semblables* (1ᵉʳ cas).

2° *Si deux triangles rectangles ont un angle aigu égal, ils sont semblables* (1ᵉʳ cas).

3° *Si deux triangles rectangles ont les côtés de l'angle droit proportionnels, ils sont semblables* (2ᵉ cas).

428. Exercice — Dire d'après quels énoncés les triangles suivants sont semblables :

1° Deux triangles équilatéraux;
2° Deux triangles rectangles isocèles;
3° Deux triangles rectangles dont l'hypoténuse est double du petit côte de l'angle droit (moitiés de triangles équilatéraux).

429. Remarque. — Quand deux triangles sont semblables, le

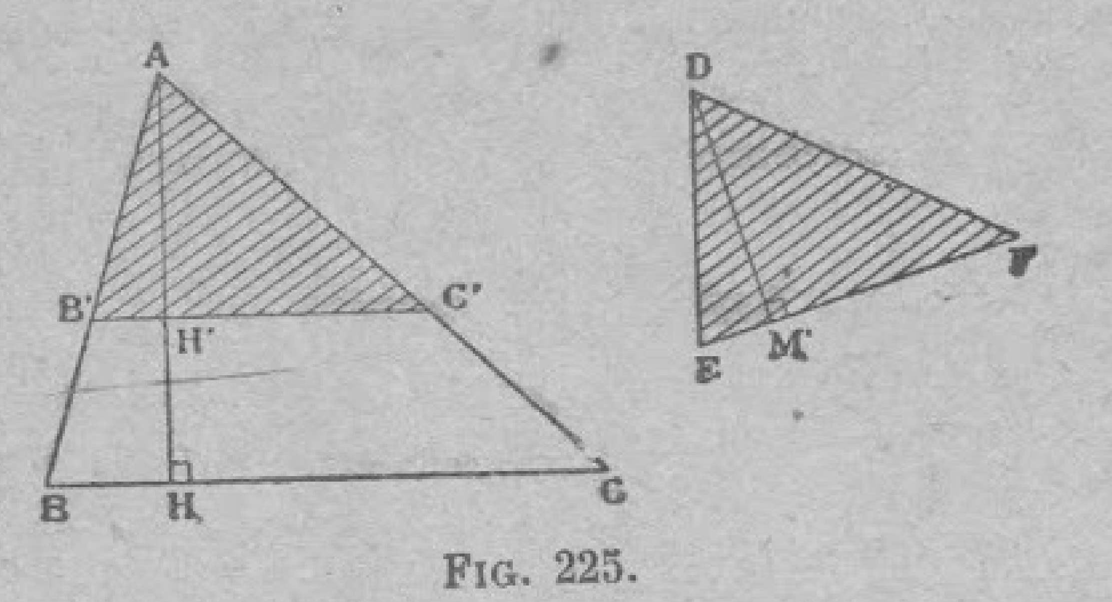


Fig. 225.

rapport de deux hauteurs homologues [1] est égal au rapport de similitude.

En effet les triangles étant placés comme le veut la définition, les hauteurs issues de A sont sur la même droite, et on a :

$$\frac{AH'}{AH} = \frac{AB'}{AB} \text{ (th. de Thalès).}$$

ou

$$\frac{DM}{AH} = \frac{DE}{AB} = \text{rapport de similitude.}$$

430. Exercices. — Dans deux triangles semblables, deux bissectrices homologues (intérieures ou extérieures) sont dans un rapport égal au rapport de similitude.

Même question pour deux médianes homologues.

Même question pour les périmètres.

431. — Utilité des cas de similitude. — La similitude de deux triangles donne lieu à quatre égalités :

$$\hat{A}' = \hat{A} \qquad \hat{B}' = \hat{B} \qquad \text{(et par suite } \hat{C}' = \hat{C}\text{).}$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Les cas de similitude sont utilisés de la manière suivante : on considère deux triangles, on constate que parmi les égalités précédentes il y en a deux de vraies, entraînant la similitude des deux triangles; on en déduit que les deux autres égalités sont vraies. — Par exemple :

$$\left.\begin{array}{c} A' = A \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{tr. semblables} \\ \text{(2ᵉ cas).} \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} B' = B \text{ (et } C' = C\text{).} \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}. \end{array}\right.$$

(1) Issues de sommets homologues.

Les cas de similitude permettent donc :

1° Étant donné des relations entre les angles d'une figure, d'en déduire des relations entre les longueurs et inversement.

2° Connaissant certaines longueurs d'une figure, d'en calculer d'autres.

Applications et exercices.

432. — *Évaluer la distance d'un point* B *à un point* A *inaccessible.* — Mesurer une base BC de 120^m par exemple (chaîne d'arpenteur); mesurer les angles en B et C (ou simplement les repérer sur une planchette à l'aide de trois épingles).

Construire un triangle A'B'C' ayant pour côté $B'C' = 120^{mm}$ $B' = B$, $C' = C$; mesurer A'B'; si A'B' vaut 154^{mm}, c'est que AB vaut 154^m. Justifier.

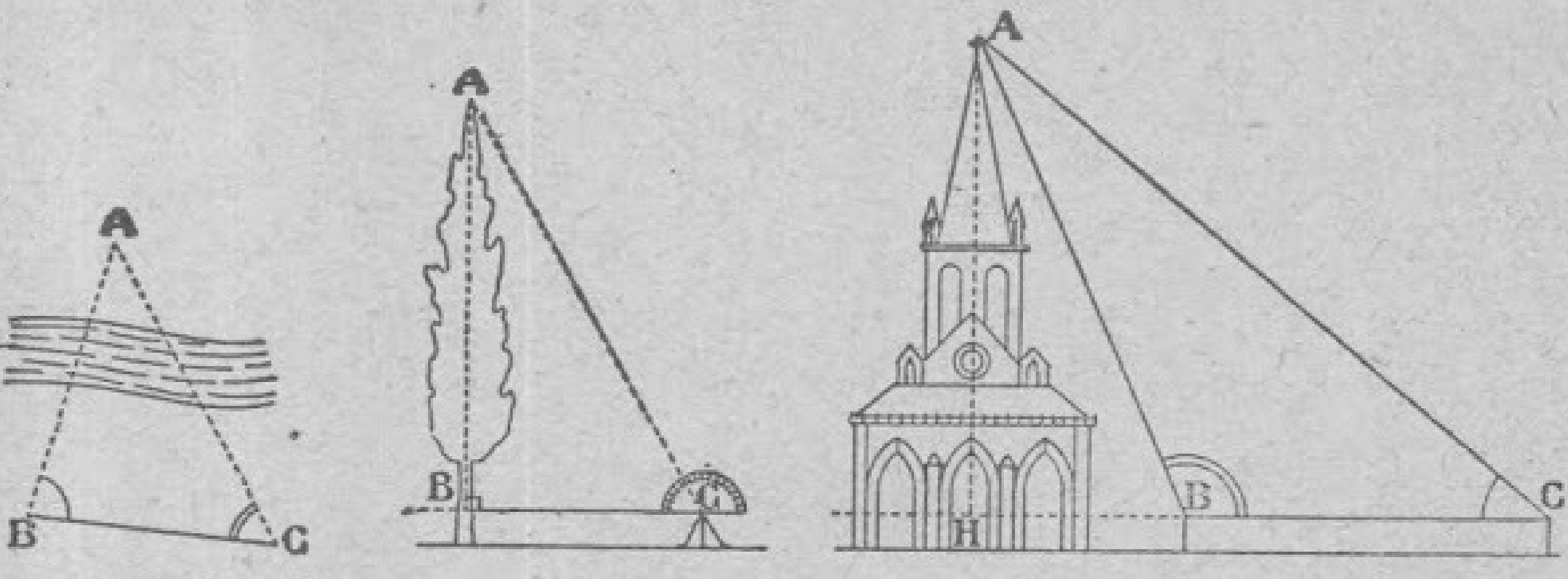


FIG. 226. FIG. 227 et 228.

433. — ***Trouver la hauteur d'un arbre, d'un clocher, etc.*** — Si le pied est *accessible* (arbre), l'opération indiquée par la figure est analogue à celle du problème précédent. Si le pied est *inaccessible* (clocher), la figure montre comment on opère.

434. — Les côtés non parallèles d'un trapèze ABCD se coupent en un point S. Connaissant (unité : m.) les bases AB = 126, DC = 84 et la hauteur $h = 60$ du trapèze, calculer les hauteurs, issues de S, des triangles SAB et SCD.

435. — Les côtés d'un triangle sont 12^{cm}, 18^{cm} et 21^{cm}; quels sont les côtés d'un triangle semblable dont le périmètre est 68^{cm}.

436. — Soit un triangle ABC, D, E les points où la bissectrice intérieure de l'angle A rencontre le côté BC et le cercle circonscrit; on joint EB. Montrer que l'on a $\overline{EB}^2 = EA \times ED$.

(Etudier les deux triangles EAB et EBD; montrer qu'ils sont semblables [1er cas] et écrire les égalités qu'entraîne la similitude.)

437. — Soit un cercle de diamètre AB, xy une perpendiculaire à AB en un point C. Par le point A on trace une droite quelconque qui rencontre xy en D et le cercle en E. Montrer que $AD \times AE = AB \times AC$.

438. — Si deux triangles ont leurs côtés parallèles chacun à chacun, ils sont semblables.

(Montrer qu'ils ont nécessairement leurs angles égaux chacun à chacun.

439. — Si deux triangles ont leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun, ils sont semblables.

440. — Construction d'un triangle semblable à un triangle donné dans le rapport $\frac{3}{5}$. Joindre un point quelconque O aux trois sommets. Prendre sur OA un segment $OA' = \frac{3}{5}$ de OA; mener A'B' parallèle à AB, puis B'C' parallèle à BC. Tracer C'A' qui doit être parallèle à CA.

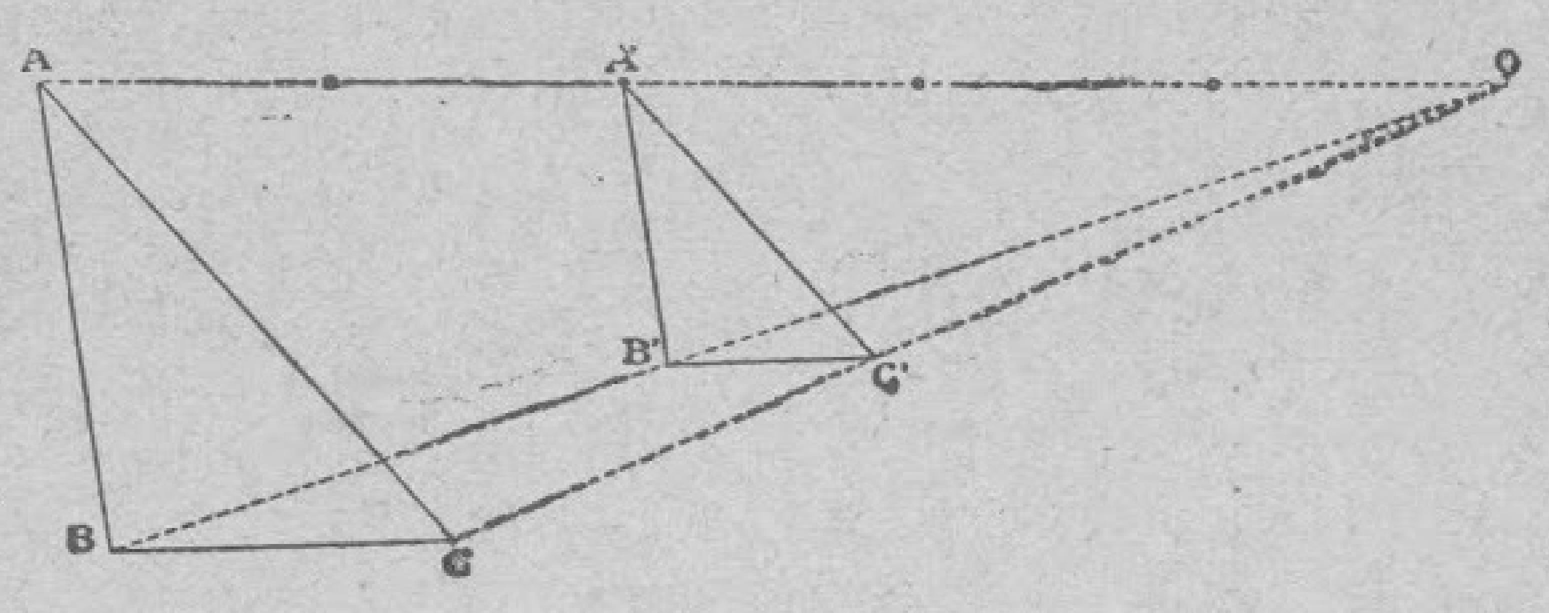


FIG. 229.

Comparer successivement A'B' à AB et OB' à OB; B'C' à BC et OC' à OC; pourquoi C'A' est-il parallèle à CA?

441. — Si deux triangles ABC, A'B'C' sont semblables, le rapport des rayons des cercles circonscrits est égal au rapport de similitude. (Soit O, O' les centres des cercles circonscrits; montrer que les triangles isocèles OBC, O'B'C' sont semblables.)

442. — Si deux triangles ABC, A'B'C' sont semblables, le rapport des rayons des cercles inscrits est égal au rapport de similitude. (Soit I et I' les centres des cercles inscrits; montrer que les deux triangles IBC, I'B'C' sont semblables; 1er cas.)

§ 4. — POLYGONES SEMBLABLES

443. — Généralisons pour un polygone les constructions données aux nos 422 et 440 pour le triangle.

Soit un polygone ABCD; joignons ses sommets à un point O. Sur OA marquons un point A' aux $\frac{2}{3}$ de OA : $\frac{OA'}{OA} = \frac{2}{3}$, et menons A'B' parallèle à AB. Puisque OA' est les $\frac{2}{3}$ de OA, A'B' sera les $\frac{2}{3}$ de AB et OB' sera les $\frac{2}{3}$ de OB.

Menons B′C′ parallèle à BC. Puisque OB′ est les $\frac{2}{3}$ de OB, B′C′ sera les $\frac{2}{3}$ de BC et OC′ sera les $\frac{2}{3}$ de OC.

Menons de même C′D′ parallèle à CD. On aura $OD' = \frac{2}{3} OD$.

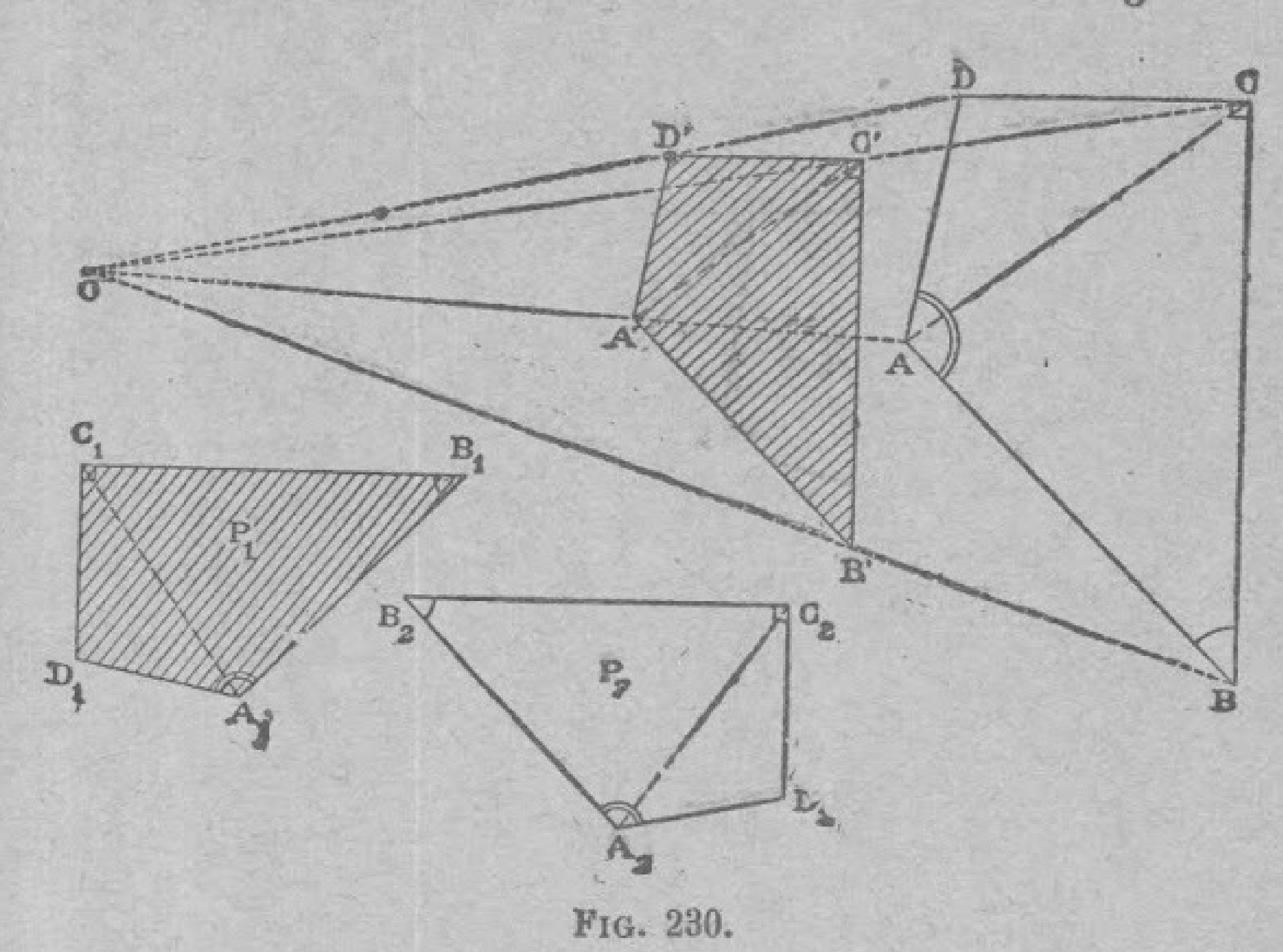


Fig. 230.

Puisque $\frac{OA'}{OA} = \frac{2}{3}$ et que $\frac{O'D}{OD} = \frac{2}{3}$, le segment D′A′ qui ferme le 2ᵉ polygone est parallèle à DA (nᵒ 404).

On peut calquer le polygone A′B′C′D′ et le transporter, soit en $A_1B_1C_1D_1$ (glissement), soit en $A_2B_2C_2D_2$ (retournement) : le polygone obtenu est dit **semblable** à ABCD.

444. Théorème. — *Si deux polygones sont semblables, ils ont leurs angles égaux chacun à chacun, et les côtés homologues* (1), *proportionnels.*

En effet : 1° les angles A et A′ ont leurs côtés parallèles et de même sens.

2° On vient de voir que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \dots = \frac{2}{3}$.

La valeur commune de ces rapports est le rapport de similitude.

(1) Les côtés homologues sont ceux qui sont adjacents à des angles égaux.

445. Remarque. — Le point O est quelconque; sur la figure, il est à l'extérieur du polygone; on peut aussi le placer à l'intérieur du polygone ou même en un sommet. Faire les figures correspondantes.

446. Théorème. — *Quand deux polygones sont semblables on peut les décomposer en triangles semblables chacun à chacun.*

Il suffit de considérer les polygones ABCD et A′B′C′D′ avant déplacement du deuxième.

Menons les diagonales issues de A, par exemple (dans le cas de la figure, il n'y en a qu'une) et les diagonales issues de A′.

Puisque $\frac{OA'}{OA} = \frac{OC'}{OC}$, A′C′ est parallèle à AC et les triangles A′B′C′, ABC sont semblables $\left(\text{rapport} : \frac{2}{3}\right)$. Il en est de même pour les autres triangles.

447. Théorème. — *Si deux polygones sont semblables le rapport de leurs périmètres est égal au rapport de similitude.*

En effet, sur l'exemple précédent, $\frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{3}$ $\frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$, etc. Donc d'après une propriété des quotients égaux, on a aussi

$$\frac{A'B' + B'C' + \dots}{AB + BC + \dots} = \frac{2}{3}$$

ou

$$\frac{\text{périm. } A'B'C'D'}{\text{périm. } ABCD} = \frac{2}{3}.$$

448. Remarque. — Soient deux polygones semblables dans lesquels deux côtés homologues valent $AB = 4^{cm}$ $A'B' = 3^{cm}$. Le rapport de similitude du premier au deuxième est $\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{3}$.

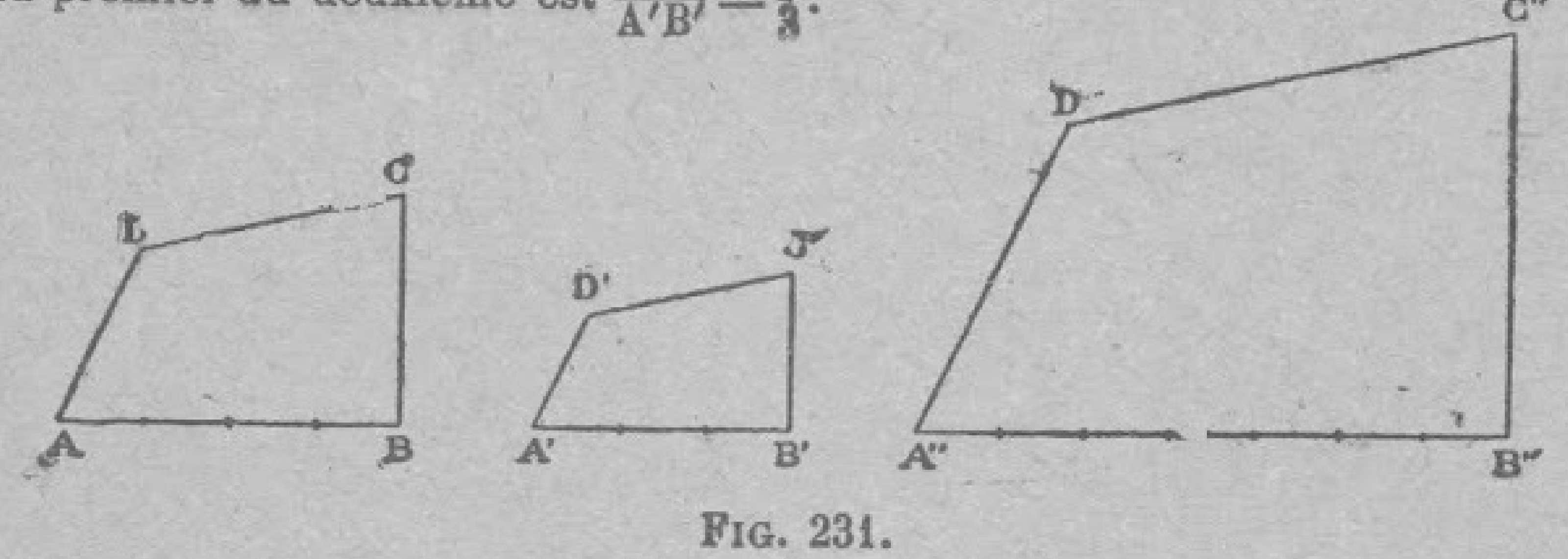


Fig. 231.

Donc

$$\frac{\text{périm. } ABCD}{\text{périm. } A'B'C'D'} = \frac{4}{3}$$

ou

$$\frac{\text{périm. } ABCD}{4} = \frac{\text{périm. } A'B'C'D'}{3}.$$

Les périmètres sont donc proportionnels aux côtés homologues.

De même si on avait trois polygones semblables deux à deux (fig. 231). Les périmètres seraient proportionnels à

4, 3 et 7.

Au lieu de côtés homologues, on peut prendre deux segments homologues quelconques, par exemple, deux diagonales homologues (joignant des sommets homologues) et on a l'énoncé général :

449. **Théorème.** — *Les périmètres de plusieurs polygones semblables sont proportionnels aux longueurs de segments homologues pris dans ces polygones.*

§ 5. — RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

450. — Un triangle **rectangle** est un triangle qui a un angle droit : $A = 100^{gr}$. Le côté opposé s'appelle hypoténuse.

Les hauteurs issues de B et C sont confondues avec les côtés de l'angle droit. Quand nous parlerons de **la hauteur du triangle**, c'est de la hauteur *relative à l'hypoténuse* qu'il s'agira.

Fig. 232.

451. **Exercice fondamental.** — Montrer que les trois triangles ABC, ABH, ACH sont semblables deux à deux.

452. **Définition.** — *On appelle* **projection** *d'un point* A *sur une droite xy le pied* A′ *de la perpendiculaire menée du point* A *à xy.* — Si un point B est sur la droite xy, il est confondu avec sa projection B′.

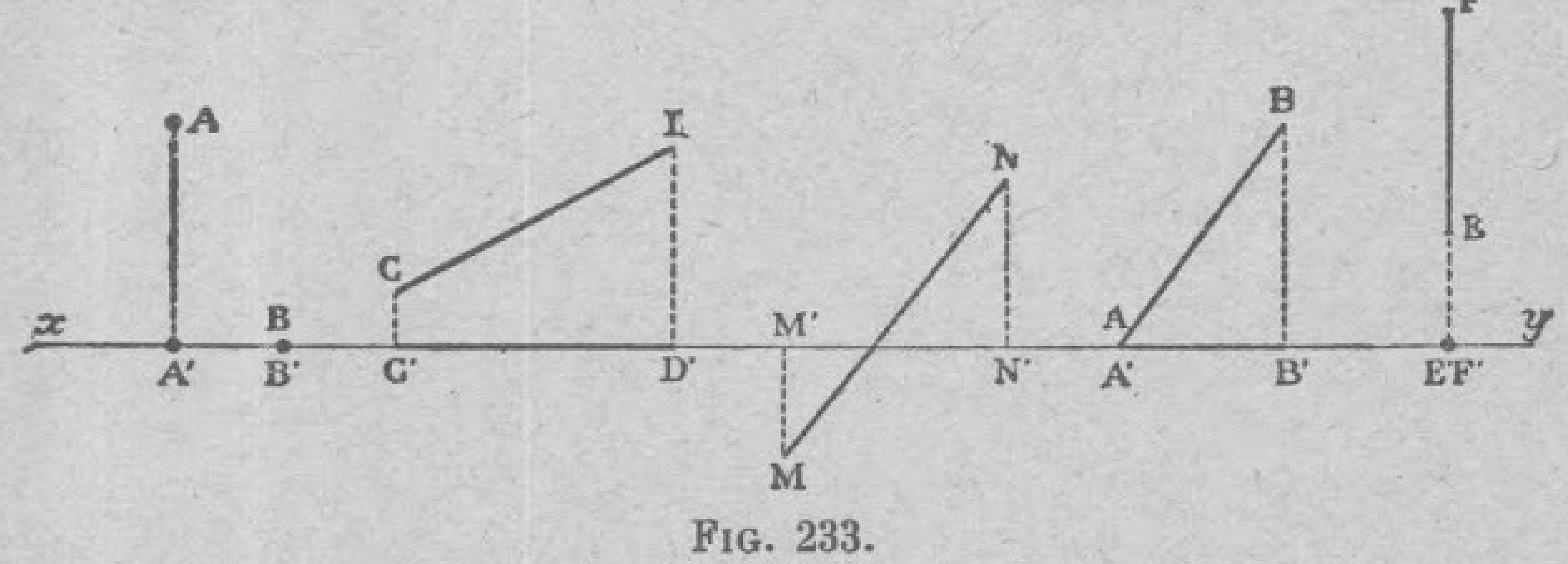


Fig. 233.

On appelle **projection** *d'un segment* CD *sur une droite xy le segment* C′D′ *limité par les projections des points* C *et* D

Dans la figure 232 quelle est la projection de AB sur l'hypoténuse? Quelle est la projection de AH?

453. **Convention de langage.** — Dans les énoncés qui vont suivre, il est entendu que : « **le côté** », « **la hauteur** »,... signifient « **le nombre qui mesure le côté** », « **le nombre qui mesure la hauteur** ».

454. **Théorème I.** — *Dans un triangle rectangle chacun des côtés de l'angle droit est moyen proportionnel entre l'hypoténuse entière et sa projection sur l'hypoténuse.*

Soit ABC un triangle rectangle en A, AH la hauteur issue de A.

Hypothèse.

$A = 100^{gr}$
AH hauteur.

Fig. 234.

Conclusion.

$$\frac{BC}{BA} = \frac{BA}{BH} \quad \text{ou} \quad \overline{BA}^2 = BC \times BH.$$

$$\frac{BC}{CA} = \frac{CA}{CH} \quad \text{ou} \quad \overline{CA}^2 = CB \times CH.$$

Les triangles AHB, ABC sont rectangles et ont l'angle aigu B commun. Ils sont donc semblables (427). Les sommets homologues sont :

A B H
C B A.

Donc :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} = \frac{AH}{AC}. \qquad (1)$$

D'où (1er et 2e rapports) la première des égalités à démontrer.

On démontrera de même que les triangles ACH, ABC sont semblables et on en déduira la deuxième partie de la conclusion.

Théorème de Pythagore [1].

455. **Théorème II.** — (**Théorème de Pythagore**). *Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.*

D'après le théorème précédent :

$$\overline{AB}^2 = BC \times BH$$
$$\overline{AC}^2 = BC \times HC.$$

Add. membre à membre.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = BC \times BH + BC \times HC$$

(1) Pythagore, philosophe grec (569-470 avant J.-C.).

Mettons BC en facteur :

$$= BC\,(BH + HC)$$
$$= BC \times BC.$$

Donc $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$.

456. Utilité du théorème de Pythagore. — Connaissant deux côtés d'un triangle rectangle, il permet de calculer le troisième. — Deux cas se présentent :

1° *On connaît les deux côtés de l'angle droit.*

Données (cm)
AB = 3
AC = 4

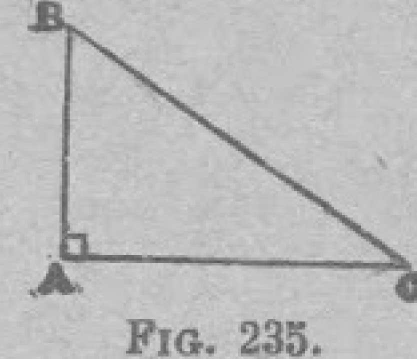


Fig. 235.

Inconnue.
BC =

On applique le théorème tel qu'il vient d'être énoncé;

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + AC^2$$
$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$
$$BC = \sqrt{25} = 5.$$

2° *On connaît l'hypoténuse et un côté de l'angle droit.*

Données (cm)
BC = 65
AB = 33

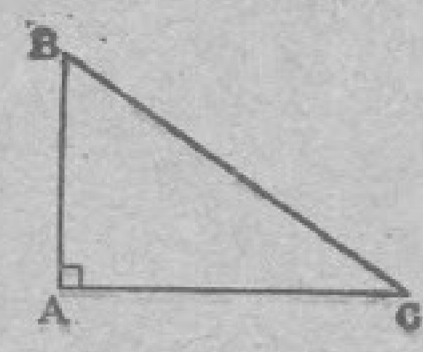


Fig. 235 *bis*.

Inconnue.
AC =

On applique le théorème sous la forme suivante :
Dans tout triangle rectangle, le carré d'un côté de l'angle droit est égal au carré de l'hypoténuse, moins le carré de l'autre côté.

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2$$
$$\overline{AC}^2 = \overline{65}^2 - \overline{33}^2 = 4\,225 - 1\,089 = 3\,136$$
$$AC = \sqrt{3\,136} = 56.$$

457. Réciproque du théorème de Pythagore. — *Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres, il en résulte que le triangle est rectangle.*

Soit, par exemple, un triangle dont les côtés sont (unité : cm) 5; 12 et 13.

$$5^2 = 25 \qquad 13^2 = 169.$$
$$12^2 = 144$$
$$\overline{169}$$

Portons sur les côtés d'un angle droit AB = 12, AC = 5 et traçons BC.

On a : $\overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 = 169$
$BC = 13.$

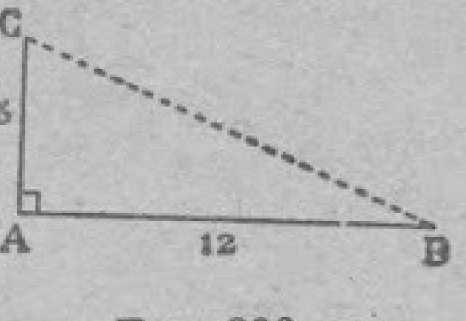
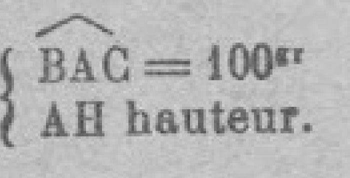


Fig. 236.

Le triangle rectangle obtenu est donc égal à celui qu'on nous a donné (3ᵉ cas d'égalité). Ce dernier est donc rectangle.

458. Théorème III. — *Dans un triangle rectangle, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.*



Hypothèse :
$\widehat{BAC} = 100^{gr}$
AH hauteur.

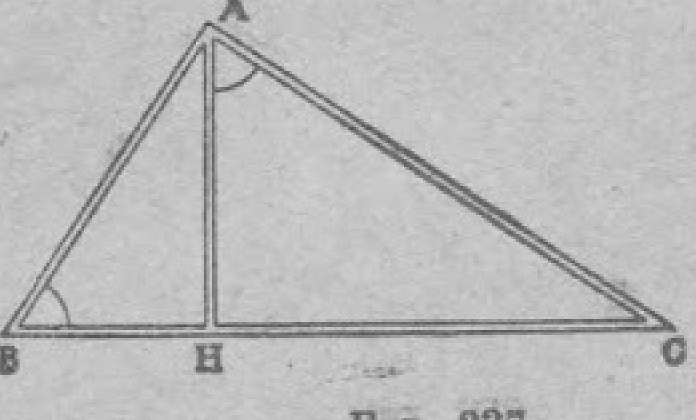


Fig. 237.

Conclusion :

$$\frac{HB}{HA} = \frac{HA}{HC}$$
ou $\overline{HA}^2 = HB \times HC.$

Les triangles ABH, ACH sont rectangles et ont les angles aigus ABH HAC égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires. Ils sont donc semblables (n° 427). Les sommets homologues sont :

A B H
C A H.

Donc : $$\frac{AB}{AC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AH}{CH}.$$

D'où (2ᵉ et 3ᵉ rapports) l'égalité à démontrer.

459. Théorème IV. — *Dans tout triangle rectangle, le produit des deux côtés de l'angle droit est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur correspondante :*

$$AB \times AC = BC \times AH.$$

Cette relation a déjà été obtenue dans la démonstration du théorème I : prendre les 1ᵉʳ et 3ᵉ rapports des égalités (1).

Elle sert surtout à calculer la hauteur dès qu'on a les trois côtés.

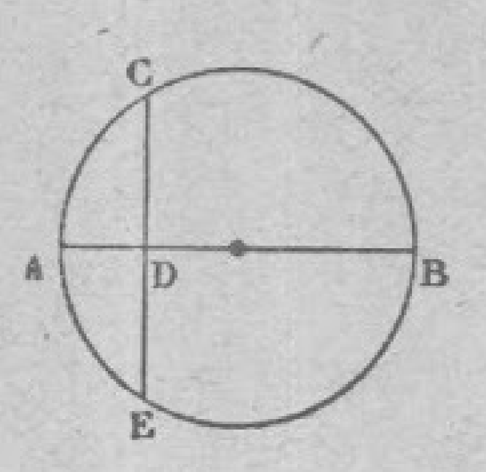


Fig. 238.

Exercices. — Soit un cercle de rayon R; AB un diamètre, CDE une perpendiculaire à ce diamètre.

460. Données (cm). $R = 18{,}5$, $AD = 5{,}3$. Inconnue. $AC =$

461. Données (cm). $CE = 24$, $AD = 9$. Inconnue. $R =$

462. — Dans un cercle de rayon $R = 15^{cm}$, on trace des cordes de 5^{cm}, 8^{cm}, 24^{cm}. Calculer leurs distances au centre.

463. — Démontrer que, dans un même cercle, une corde et sa distance au centre varient en sens contraires : si l'une augmente, l'autre diminue.

464. — Dans un cercle de rayon $R = 65^{mm}$ on inscrit un trapèze isocèle ayant pour bases 112 et 32^{mm}. Calculez sa hauteur. (Deux cas de figure.)

465. — Soit ABCD un trapèze rectangle (AD est le côté perpendiculaire aux bases AB et DC).

Données (cm)	Inconnue.
$AB = 91$	BC
$CD = 127$	
$AD = 77$	

466. — Soit deux cercles de rayons $R = 95^{mm}$, $R' = 30^{mm}$ et $d = 97^{mm}$ leur distance des centres. Une droite les touche l'un et l'autre aux points A et B (tangente commune). Calculer la longueur AB.

Applications.

467. Diagonale du carré. — Soit a le côté d'un carré, supposé connu, et soit à calculer la diagonale BD. On a :

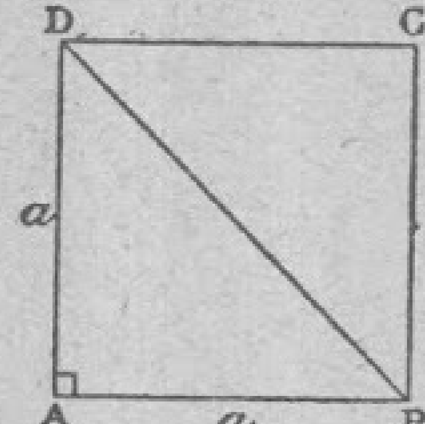


Fig. 239.

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$$
$$\overline{BD}^2 = a^2 + a^2 = a^2 \times 2.$$
$$BD = a \times \sqrt{2} \text{ (racine d'un produit).}$$

Donc : *On a la diagonale d'un carré en multipliant le côté par* $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2} = 1{,}414$ à 0,001 près par défaut.

468. Remarque. $a \times \sqrt{2}$ est aussi l'hypoténuse d'un triangle rectangle isocèle de côtés a.

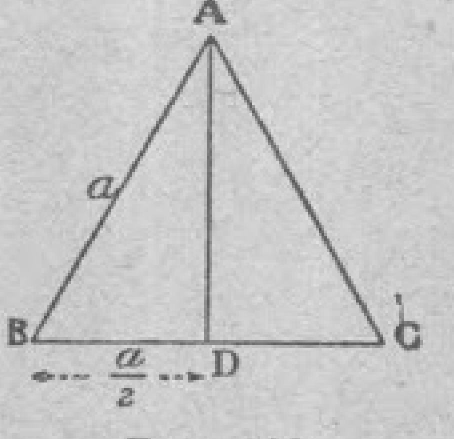


Fig. 240.

469. Hauteur du triangle équilatéral. — Soit a le côté, supposé connu, et proposons-nous de calculer la hauteur AD. Remarquons qu'elle est aussi médiane.

On a

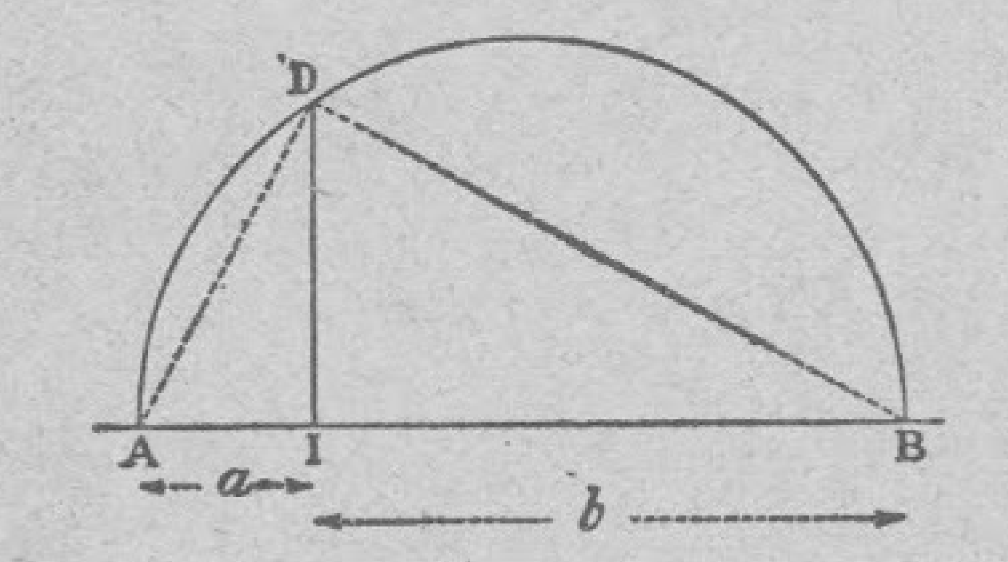
$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2$$
$$\overline{AD}^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \text{ (carré d'un quotient)}$$
$$= \frac{a^2 \times 4}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2 \times 4 - a^2}{4} = \frac{a^2 \times (4-1)}{4} = \frac{a^2 \times 3}{4}.$$
$$AD = \frac{a \times \sqrt{3}}{2} \text{ (racine d'un quotient).}$$

Donc : *On obtient la hauteur d'un triangle équilatéral en multipliant le côté par* $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sqrt{3} = 1{,}732$ à 0,001 près par défaut.

470. Construire la moyenne proportionnelle à deux segments donnés. — Soit a et b deux segments donnés, x leur moyenne proportionnelle définie par la relation

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{ou} \quad x^2 = ab.$$



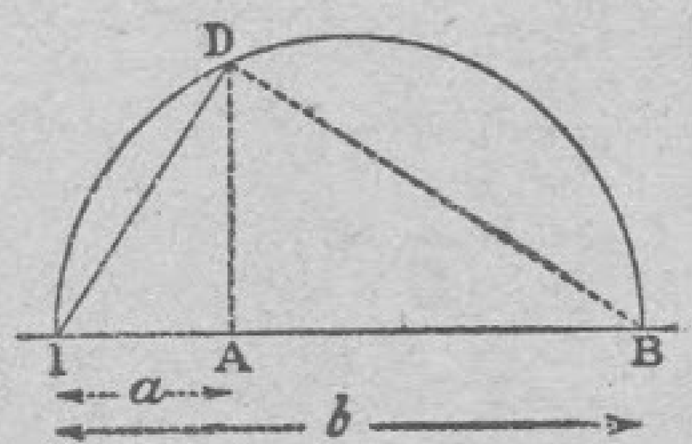


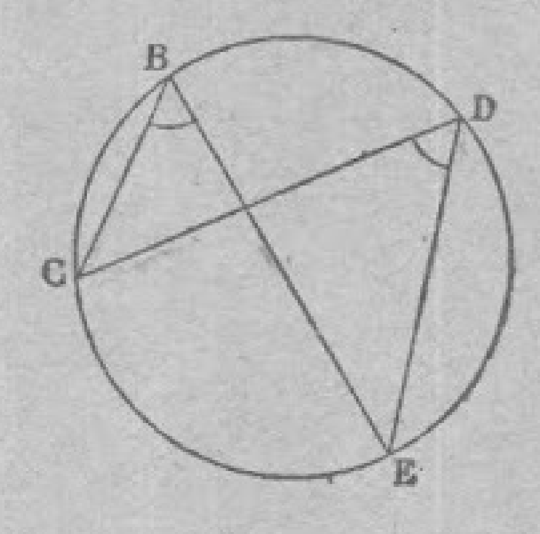
Fig. 241.

1re Solution. — Sur une droite indéfinie on porte de part et d'autre d'un point I les segments $IA = a$, $IB = b$. On trace le demi-cercle de diamètre AB et la perpendiculaire en I à AB, qui se coupent en D. Demontrer que ID est le segment x cherché.

2e Solution. — Sur une droite infinie on porte à partir d'un point I, et d'un même côté, les segments $IA = a$, $IB = b$. On trace le demi-cercle de diamètre IB (le plus grand des segments) et la perpendiculaire en A à IB, qui se coupent en D. Démontrer que ID est le segment x cherché.

§ 6. — SÉCANTES A UN CERCLE

471. Condition nécessaire et suffisante pour que quatre points soient sur un cercle. — Soit un quadrilatère BCDE, convexe ou croisé (fig. 242).



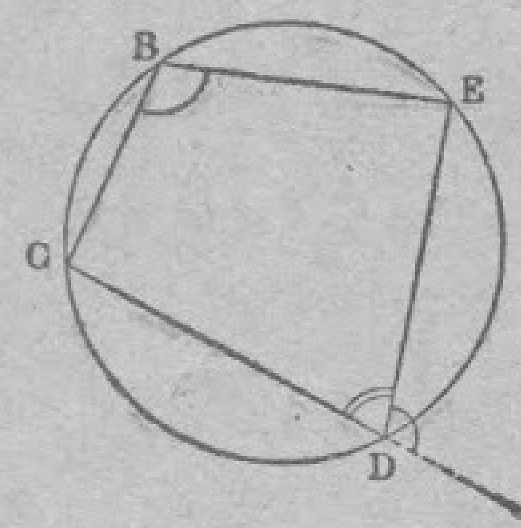


Fig. 242.

D'après les énoncés nos 361 et 368, et les réciproques nos 370 et 369 que nous avons admises, il revient au même :

de dire que les sommets BCDE d'un quadrilatère croisé sont sur un cercle,
ou de dire que les angles B et D sont égaux.

B, C, D, E sur un cercle | B = D.

⟶ (cond. nécess.).
⟵ (cond. suffi.).

de dire que les sommets BCDE d'un quadrilatère convexe sont sur un cercle,
ou de dire que les angles B et D sont supplémentaires.

B, C, D, E sur un cercle | B + D = 2^{droits}.

⟶ (cond. nécess.).
⟵ (cond. suffi.).

Au moyen de relations entre angles, nous savons donc écrire la condition *nécessaire et suffisante* pour que quatre points soient sur un cercle.

Les cas de similitude des triangles vont nous permettre de trouver des relations entre longueurs pour traduire le même fait.

472. Théorème. — *Si d'un point* A *on mène à un cercle deux sécantes* ABC, ADE, *on a*

$$AB \times AC = AD \times AE.$$

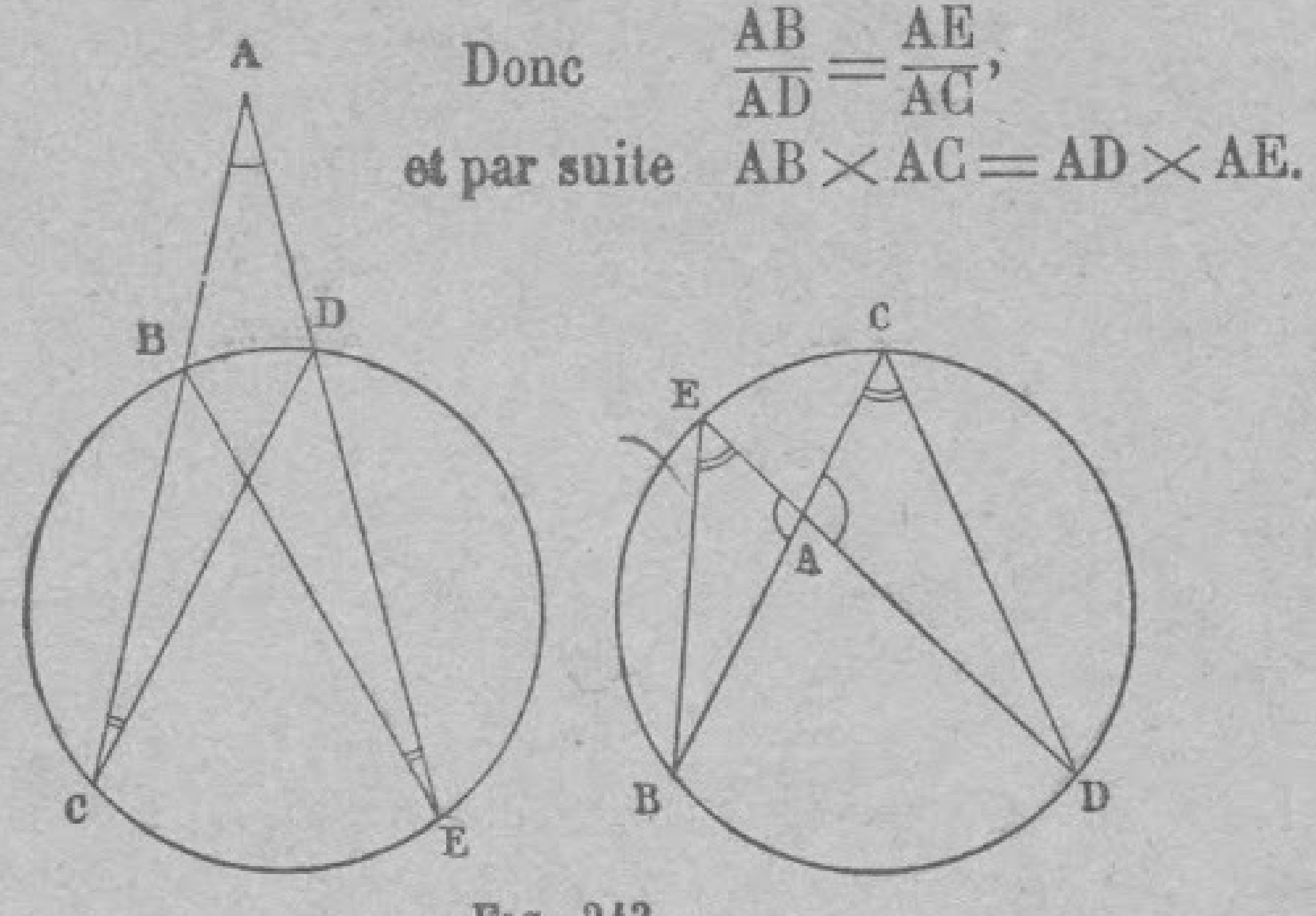
Il y a deux cas de figure : A est extérieur ou intérieur.

Traçons CD et BE. Les triangles ABE, ADC sont semblables comme ayant : $\widehat{A}$ commun (ou opposés par le sommet).

$\widehat{C} = \widehat{E}$ angles inscrits interceptant le même arc).

Les sommets homologues sont

A B E
A D C.



Donc $\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$,

et par suite $AB \times AC = AD \times AE$.

Fig. 243.

473. Remarque. — Si A est intérieur au segment BC, il est aussi intérieur au segment DE; s'il est extérieur au segment BC, il est aussi extérieur au segment DE.

474. Théorème réciproque. — *Deux droites se coupent en* A; *soient deux points* B *et* C *sur l'une, deux points* D *et* E *sur l'autre, tels que* A *soit à la fois intérieur aux segments* BC *et* DE, *ou à la fois extérieur à ces segments; si on a*

$$AB \times AC = AD \times AE$$

les quatre points B, C, D, E *sont sur un même cercle.*

En effet, par les trois points B, C, D il passe un cercle; soit E′ le point où il recoupe la droite AD. Je vais montrer que E et E′ sont confondus. D'abord, d'après la remarque précédente et l'hypothèse, ils sont du même côté de A. Ensuite on a :

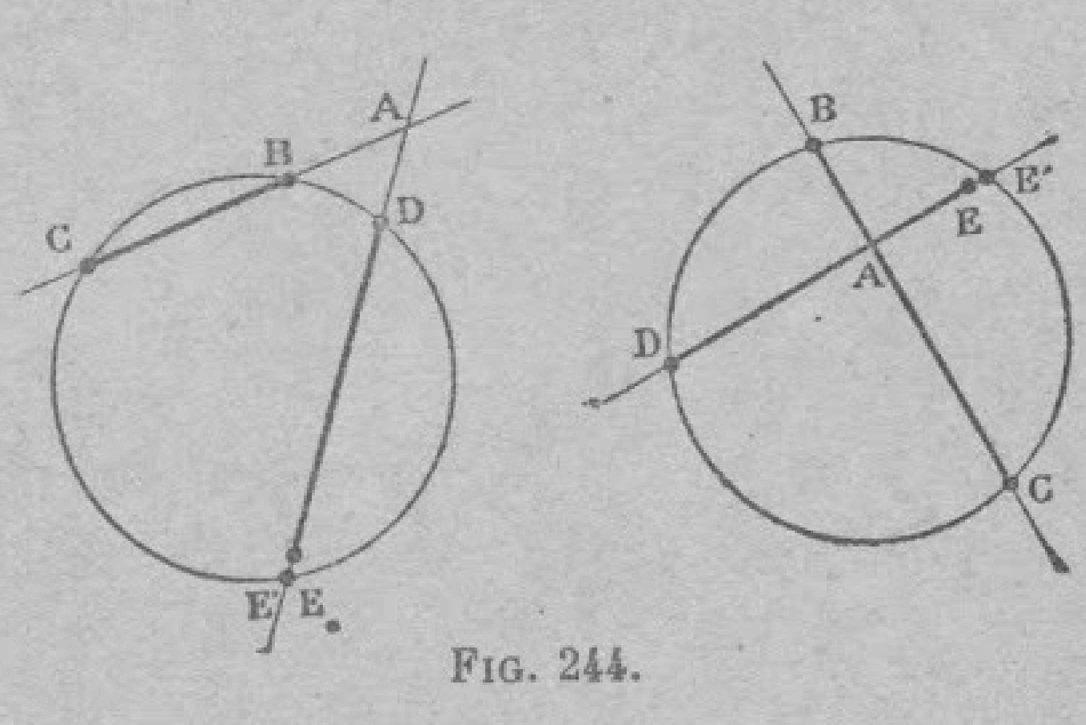


Fig. 244.

$AB \times AC = AD \times AE$ (hyp.)
$AB \times AC = AD \times AE'$ (théorème direct).

Donc $AD \times AE = AD \times AE'$
$AE = AE'$.

E et E′ sont à la même distance de A, et du même côté de ce point : ils sont donc confondus.

475. Théorème. — *Si, d'un point extérieur à un cercle, on mène une tangente et une sécante, la tangente est moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure.*

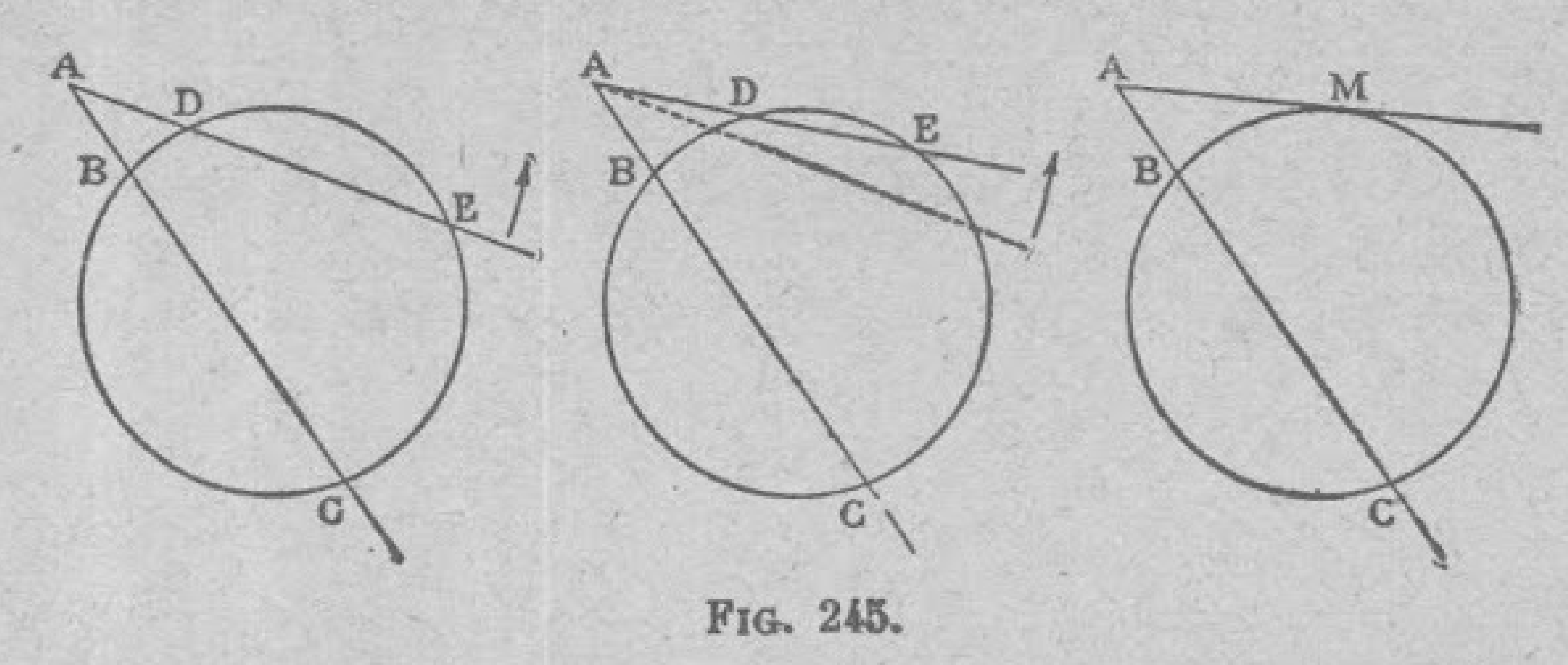


FIG. 245.

En effet AM peut être regardée comme obtenue en faisant pivoter ADE autour de A jusqu'à ce que D et E viennent se confondre avec M.

Or $AB \times AC = AD \times AE.$

Cette égalité devient : $AB \times AC = \overline{AM}^2.$

476. Exercice. — Faire une démonstration directe en utilisant les triangles semblables AMC et AMB.

477. Théorème réciproque. — *Étant donné un angle de sommet* A, *deux points,* B, C *sur l'un des côtés, un point* M *sur l'autre, si on a*

$$\overline{AM}^2 = \overline{AB} \times \overline{AC}$$

la droite AM *est tangente au cercle passant par les trois points* BCM.

Même démonstration qu'au n° 474.

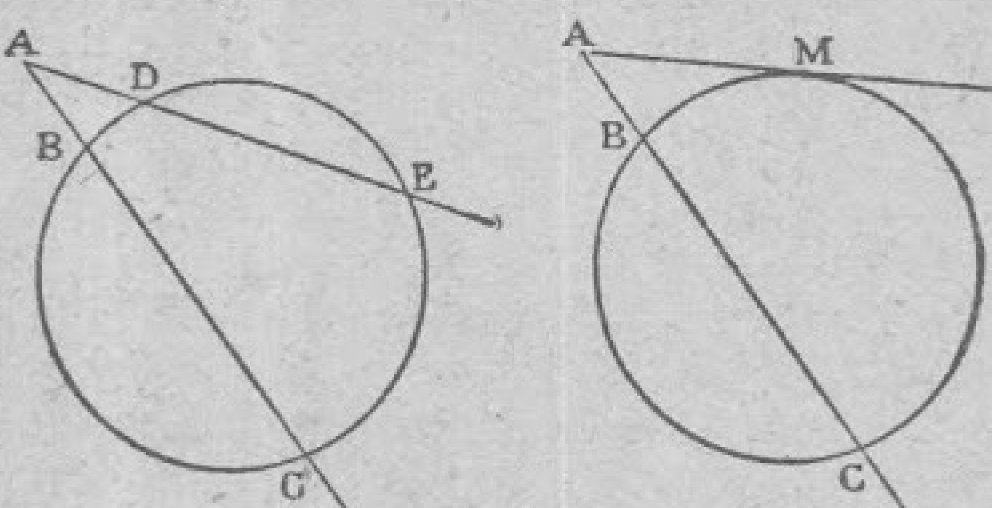


FIG. 246.

Résumé :

B, C, D, E sur un même cercle.	$AB \times AC = AD \times AE.$	Le cercle BCM est tangent à AM.	$\overline{AM}^2 = AB \times AC.$
⟶ ⟵		⟶ ⟵	

478. Autre forme des théorèmes précédents. — *Si d'un point fixe* A *on mène à un cercle une sécante mobile le coupant en* B *et* C, *le produit* $AB \times AC$ *est constant*, c'est-à-dire *conserve la même valeur quand la sécante pivote autour du point* A.

En effet, pour deux sécantes quelconques, on a des produits égaux.

479. Évaluation de ce produit quand on connaît le rayon R du cercle et la distance $OA = d$.

Choisissons comme sécante le diamètre passant par A.

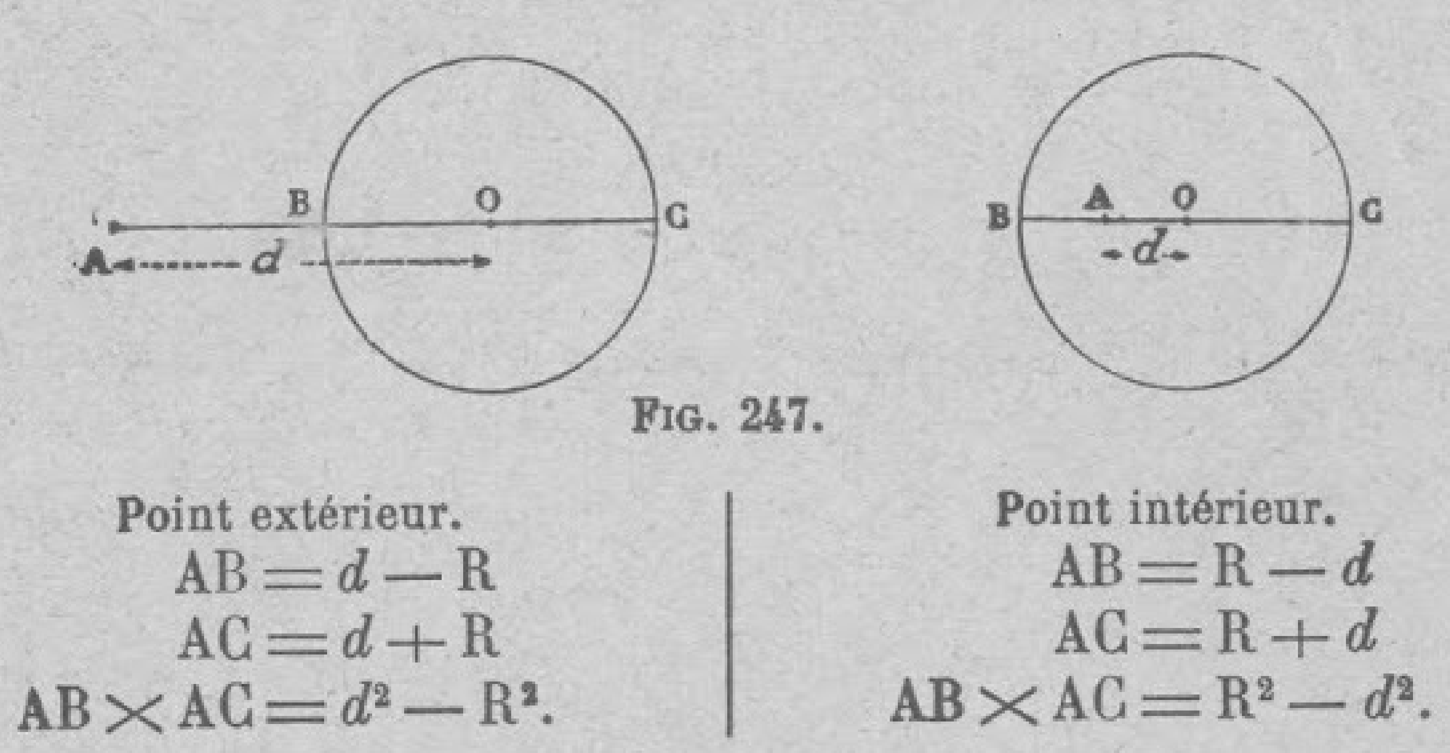


FIG. 247.

Point extérieur.	Point intérieur.
$AB = d - R$	$AB = R - d$
$AC = d + R$	$AC = R + d$
$AB \times AC = d^2 - R^2.$	$AB \times AC = R^2 - d^2.$

Exercices et constructions.

480. — Soit A, B, C trois points en ligne droite (se succédant dans cet ordre); par B et C on fait passer un cercle variable, et de A on mène les tangentes AM, AM′ à ce cercle. Où se trouvent tous les points M et M′ obtenus?

481. — Deux cercles se coupent en A et B. Sur le prolongement de la corde AB, on marque un point S d'où on mène une tangente à chacun des deux cercles. Que peut-on dire de ces tangentes?

482. — Tracer un triangle ABC rectangle en A, le cercle circonscrit, et la corde issue de A perpendiculaire à BC; appliquer à cette figure l'un des théorèmes du § 6 et retrouver un théorème relatif au triangle rectangle.

482 *bis*. — Même exercice avec la figure formée par le triangle rectangle ABC, le cercle de diamètre AC qui recoupe BC en D, et le segment AD.

482 *ter*. — Même exercice avec la figure formée par le triangle ABC et le cercle de centre B passant par A.

483. Construire la moyenne proportionnelle à deux segments donnés *a*, *b*. — Sur une demi-droite Iz on porte

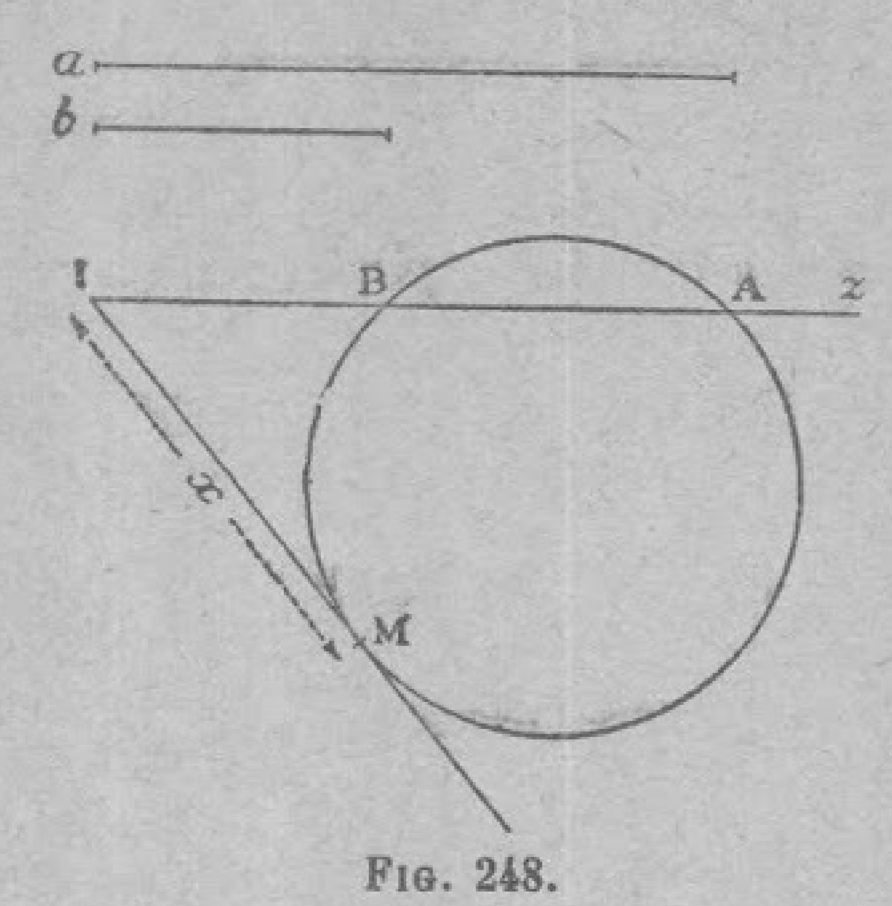


Fig. 248.

IA = a, IB = b : on fait passer un cercle quelconque par A et B et de I on lui mène une tangente IM. IM est le segment cherché.

Application. 484. — *Par deux points donnés A et B situés d'un même côté d'une droite xy, faire passer un cercle tangent à la droite.*

Faire un croquis en supposant le problème résolu. Soit T le point de contact inconnu, I le point de rencontre de AB et de la droite. Chercher à déterminer IT; T peut alors être marqué et le problème s'achève aisément.

§ 7. — POLYGONES RÉGULIERS

Revoir le § 7, page 89.

485. Théorème. — *Si on divise un cercle en un certain nombre de parties égales :*

1° *les points de division sont les sommets d'un polygone régulier;*

2° *les tangentes aux points de division sont les côtés d'un polygone régulier.*

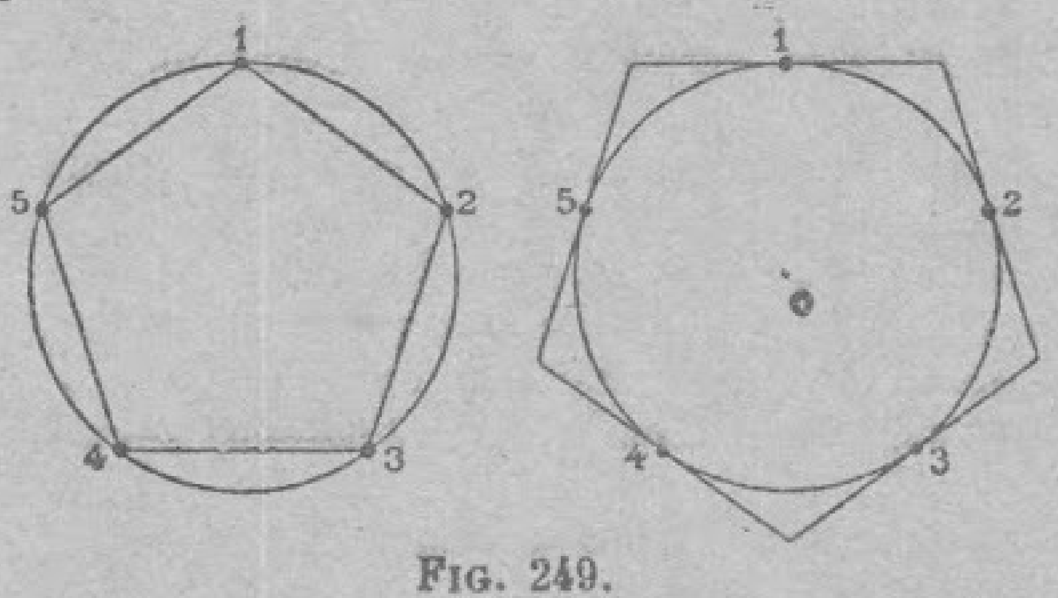


Fig. 249.

La 1re partie a été démontré au n° 374; la 2e partie se démontre de la même façon.

486. Théorème réciproque. — *Étant donné un polygone régulier, on peut tracer deux cercles concentriques, l'un passant*

par tous les sommets (**cercle circonscrit**), *l'autre tangent à tous les côtés* (**cercle inscrit**).

1° Par les trois sommets A, B, C du polygone régulier donné, il passe un cercle; soit O son centre; les cordes AB et BC étant égales, les angles au centre $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOC}$ sont égaux.

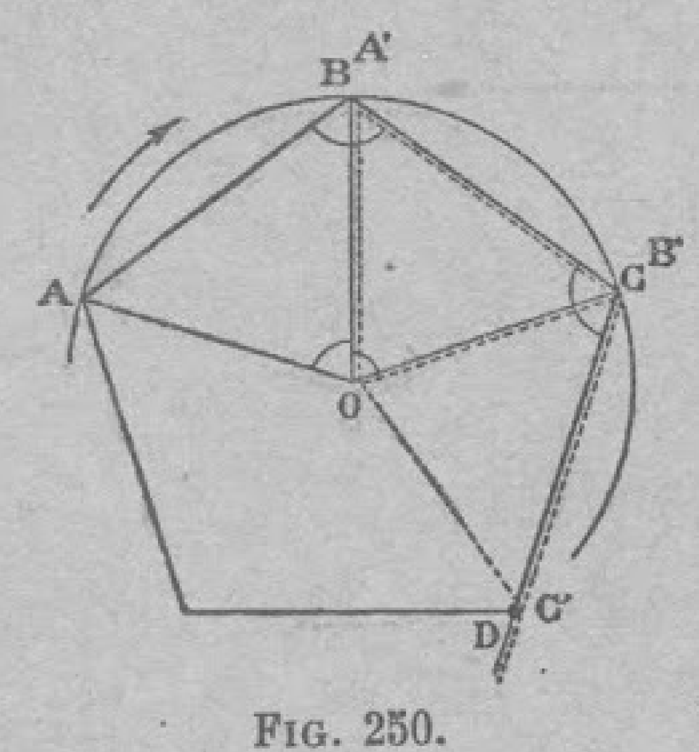


Fig. 250.

Calquons la figure et faisons-la tourner de l'angle AOB autour du point O : A' (calque de A) vient en B, B' vient en C, l'angle $\widehat{A'B'C'}$ vient sur son égal $\widehat{BCD}$: le point C vient sur la demi-droite CD, et, comme BC = CD (hypothèse), C' vient sur le point D. Donc OC', calque de OC, vient sur OD, et lui est égal. — Le cercle passant par trois sommets A, B, C du polygone passe donc par le sommet suivant : de proche en proche, on démontre ainsi qu'il passe par tous.

2° Le cercle circonscrit étant tracé, les côtés du polygone sont des cordes égales : ils sont donc tangents en leurs milieux à un cercle concentrique.

487. Définitions. — On appelle : **centre** d'un polygone régulier le centre commun aux cercles circonscrit et inscrit;

rayon d'un polygone régulier le rayon du cercle circonscrit;

apothème, le rayon du cercle inscrit;

angle au centre un angle tel que AOB.

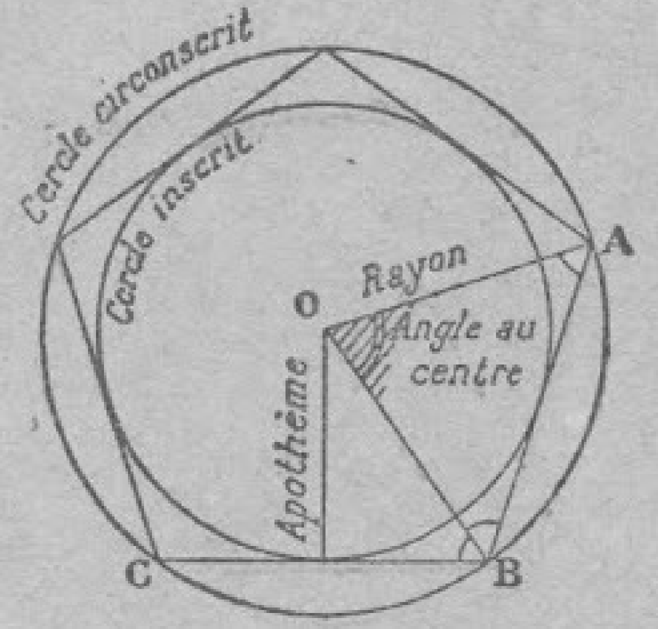


Fig. 251.

488. Angle d'un polygone régulier. — Remarquons que l'angle ABC du polygone est double de l'angle OBA; il est donc égal à la somme des angles à la base du triangle isocèle OAB et, par suite, il est le supplément de l'angle au centre AOB du polygone. Comme l'angle au centre s'obtient en divisant 4^D (ou 400^{gr}) par le nombre de côtés, on est conduit au théorème et au tableau suivants :

Théorème. — *L'angle d'un polygone régulier est le supplément de l'angle au centre de ce polygone.*

Nombre de côtés.	Nom.	Angle au centre.	Angle.
3	Triangle équilatéral.	$\frac{4^D}{3}$ ou $133^{gr},33$ ou 120°	$\frac{2^D}{3}$ ou $66^{gr},66$ ou 60°
4	Carré.	1^D ou 100^{gr} ou 90°	1^D ou 100^{gr} ou 90°
5	Pentagone régulier.	$\frac{4^D}{5}$ ou 80^{gr} ou 72°	$\frac{6^D}{5}$ ou 120^{gr} ou 108°
6	Hexagone régulier.	$\frac{2^D}{3}$ ou $66^{gr},66$ ou 60°	$\frac{4^D}{3}$ ou $133^{gr},33$ ou 120°

On voit que l'angle augmente avec le nombre de côtés.

489. — Carré.

I. *Inscrire un carré dans un cercle donné* (n° 377).

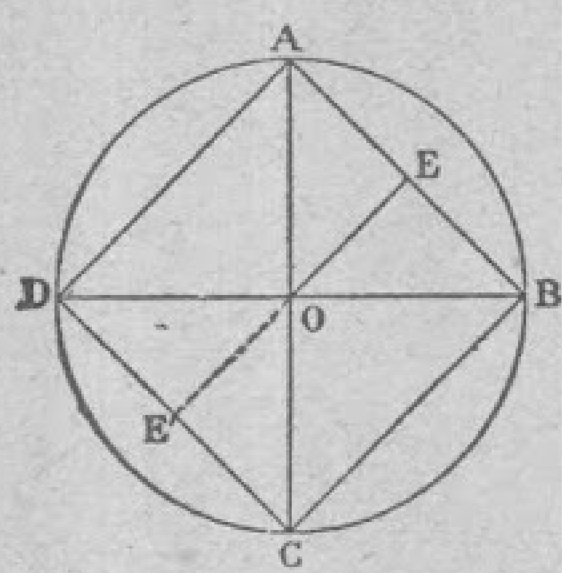


Fig. 252.

II. *Connaissant le rayon du cercle, calculer le côté et l'apothème du carré inscrit.*

Le triangle isocèle rectangle AOB donne

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = R^2 \times 2 = 2R^2.$$
$$AB = R \times \sqrt{2}.$$

Quant à l'apothème, il est la moitié du côté :

$$OE = \frac{R \times \sqrt{2}}{2}.$$

490. — Triangle équilatéral et hexagone régulier.

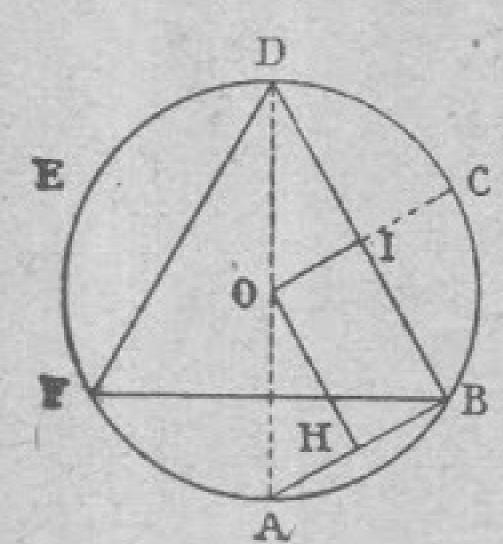


Fig. 253.

I. *Les inscrire dans un cercle donné* (n° 375).

II. *Calcul de leur côté et de leur apothème connaissant le rayon du cercle.*

On a déjà vu (375) que le côté de l'hexagone régulier est égal au rayon R, et (376) que l'apothème du triangle équilatéral est $\frac{R}{2}$.

Le côté du triangle équilatéral se calculera dans le triangle rectangle ABD :

$$\overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AB}^2.$$
$$= (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = 3R^2 = R^2 \times 3$$
$$BD = R \times \sqrt{3}.$$

L'apothème OH de l'hexagone est égal à $\frac{BD}{2}$, donc à $\frac{R \times \sqrt{3}}{2}$.

Carré. côté $= R \times \sqrt{2}$; ap. $= \frac{R \times \sqrt{2}}{2}$	**Hexagone régulier.** $c = R$; $a = \frac{R \times \sqrt{3}}{2}$.	**Triangle équilatéral.** $c = R \times \sqrt{3}$; $a = \frac{R}{2}$.

491. Symétrie des polygones réguliers.

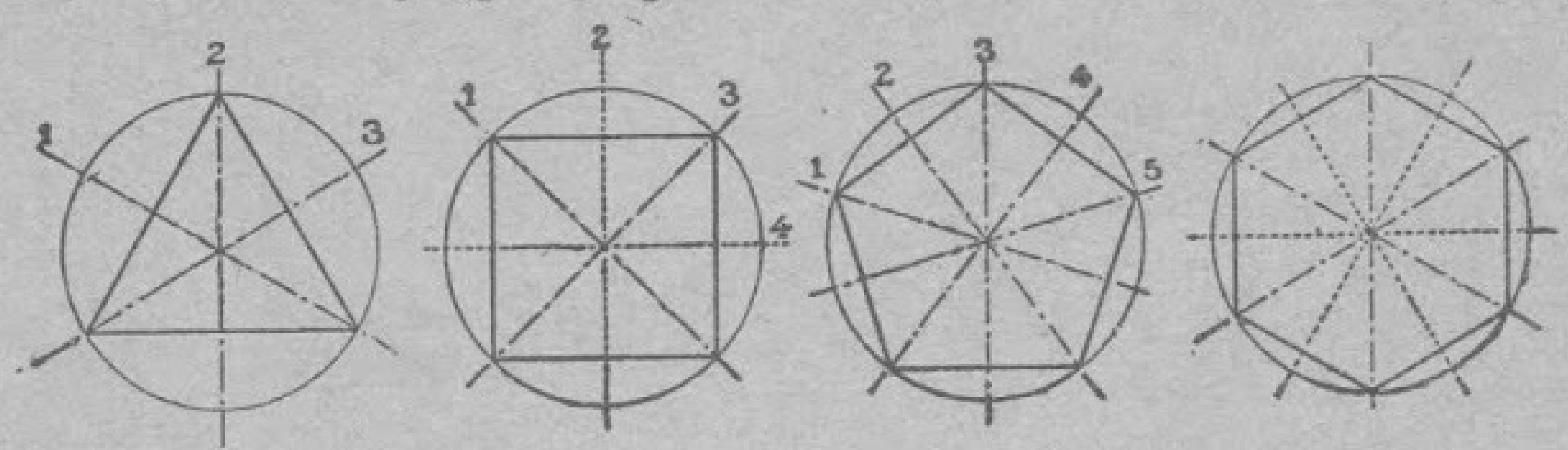


Fig. 254.

Tr. équilatéral.	Carré.	Pentagone rég.	Hexagone rég.
3 axes.	4 axes (2 + 2).	5 axes.	6 axes (3 + 3).

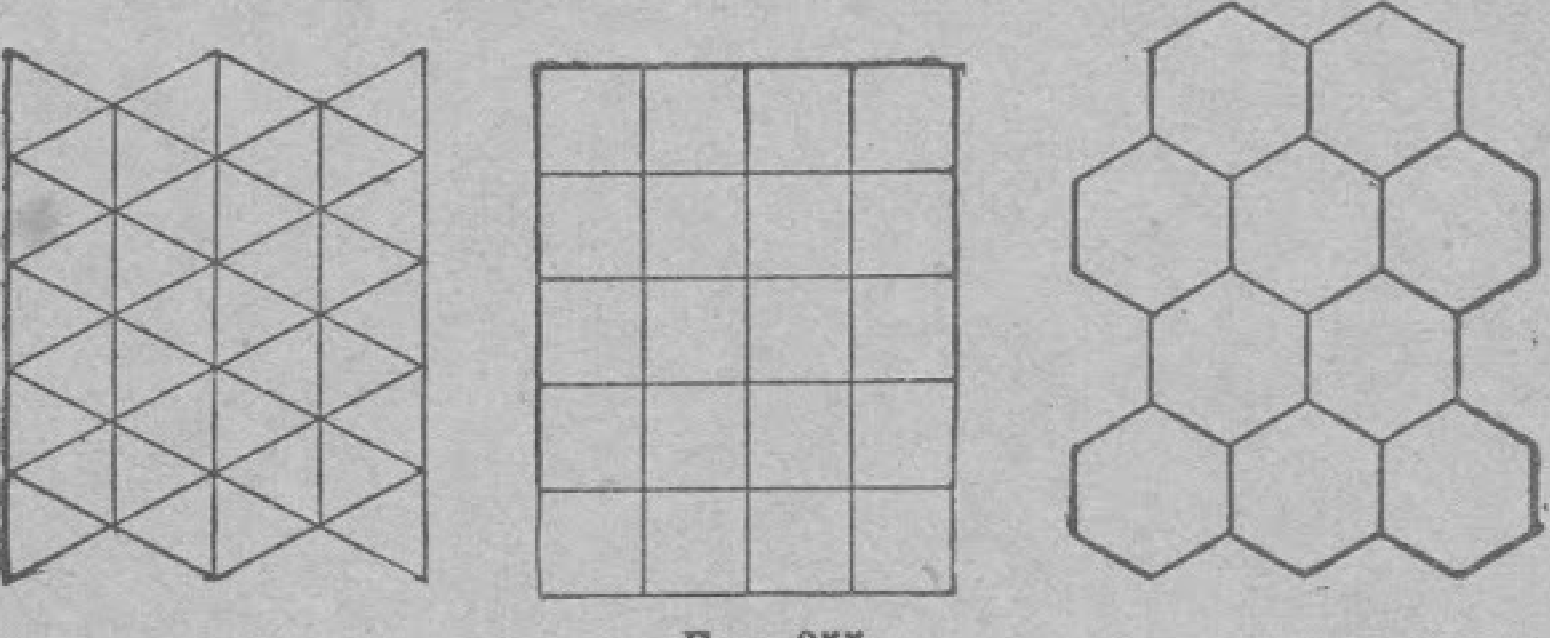
Un polygone régulier a autant d'axes de symétrie que de côtés.

Si le nombre des côtés est pair (carré, hexagone) il y a deux sortes d'axes, les uns portent les rayons, les autres les apothèmes.

Si le nombre des côtés est impair (triangle, pentagone), ces deux sortes d'axes se confondent.

Quand le nombre des côtés est pair, le centre du polygone est un centre de symétrie.

492. Dallages. — Cherchons les dallages que l'on peut réaliser avec des


Fig. 255.

polygones réguliers *tous égaux* s'étoilant autour d'un sommet. Il faut chercher si l'angle est un diviseur de quatre droits.

Triangle : $4 : \frac{2}{3} = 6.$

Carré : $4 : 1 = 4$.

Pentagone : $4 : \frac{6}{5} = \frac{10}{3}$, non acceptable.

Hexagone : $4 : \frac{4}{3} = 3$.

Inutile de continuer ; l'angle augmentant, le quotient diminue et on ne peut pas avoir moins de trois polygones autour d'un point.

On a donc les trois dallages possibles (fig. 255).

Si on prend des polygones d'espèces différentes, on peut varier les dallages :

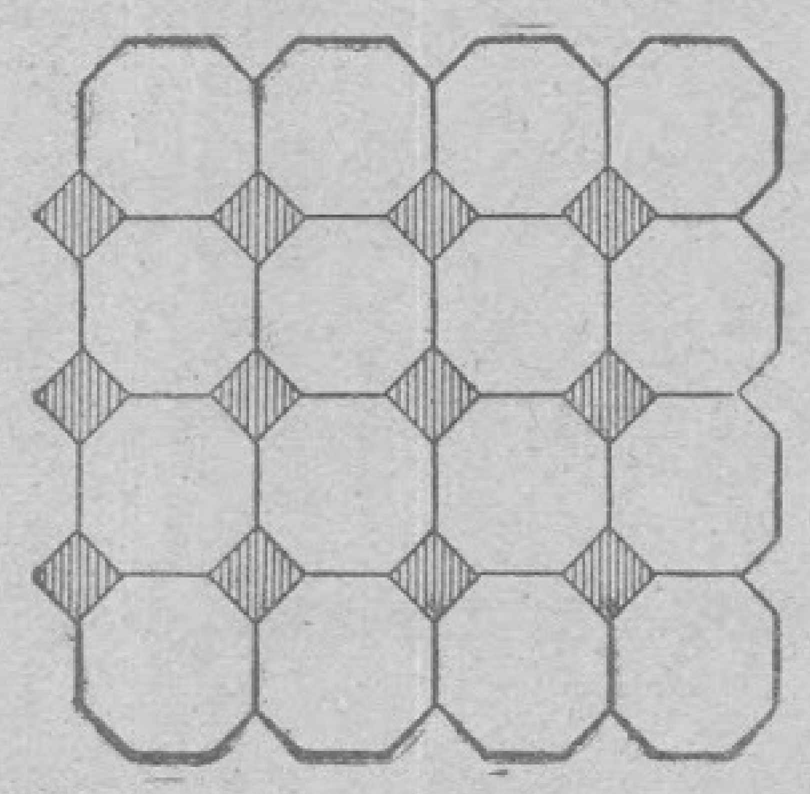
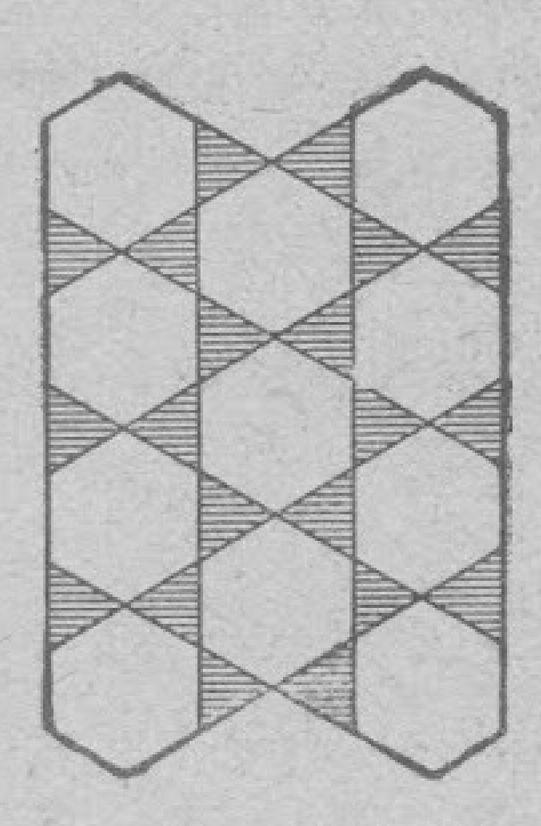



Fig. 256.

Similitude des polygones réguliers.

493. Théorème. — *Si deux polygones réguliers ont le même nombre de côtés, ils sont semblables.*

En effet leur angle au centre est le même. On peut donc les transporter l'un sur l'autre de façon que leurs centres coïncident et que

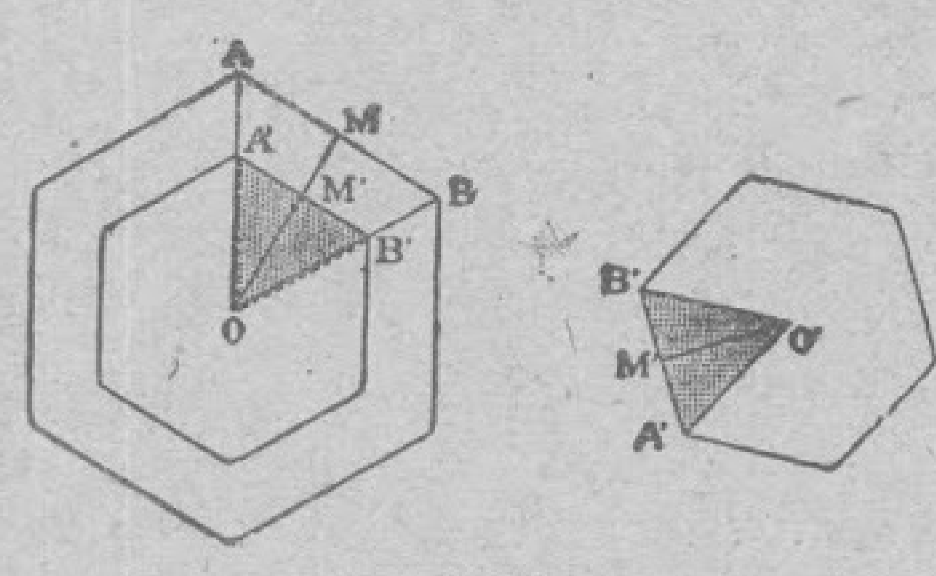


Fig. 256 *bis*.

les rayons de l'un soient sur les rayons de l'autre : OA' sur OA, OB' sur OB, etc.

Comme OA' = OB', que OA = OB, on a évidemment :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} ;$$ donc A'B' est parallèle à AB.

Les deux polygones sont justement dans les conditions de la définition donnée au n° 443.

494. Remarque. — Le rapport de similitude est égal au rapport des rayons (ou des apothèmes). Donc (n° 449).

Les périmètres de plusieurs polygones réguliers de même espèce (carrés, ou bien hexagones, ou bien...) sont proportionnels aux rayons, ou aux apothèmes.

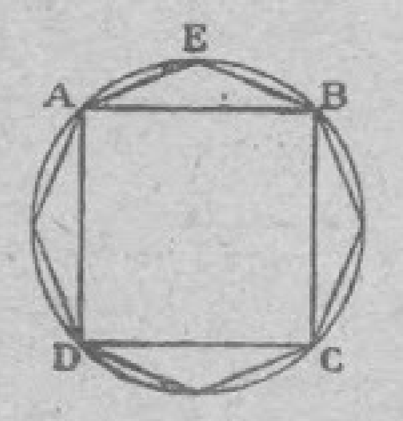
495. Exercice. — De chacun des sommets d'un carré comme centre, on décrit, avec la demi-diagonale comme rayon, le quadrant limité aux côtés du carré.

Montrez que les huit points ainsi obtenus sur les côtés sont les sommets d'un octogone régulier.

Calculez le côté de cet octogone, connaissant le côté *a* du carré.

§ 8. — LONGUEUR DU CERCLE

496. — Dans un cercle inscrivons successivement les polygones réguliers de quatre côtés (carré), de huit côtés (octogone), de seize côtés, ... en doublant toujours. Les périmètres de ces polygones vont en augmentant, puisqu'on remplace un segment, AB par exemple, par une ligne brisée AEB. Au bout de quelques opérations le polygone et le cercle ne peuvent plus être distingués sur le dessin.



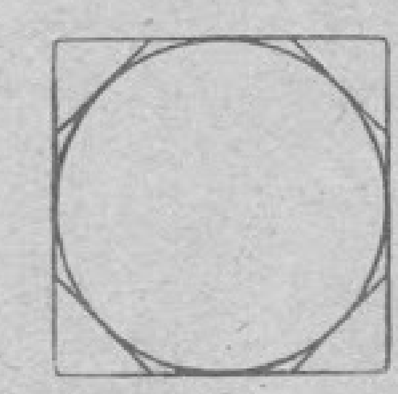


Fig. 257.

Circonscrivons de même un carré, un octogone, ... ; les périmètres vont en diminuant (dire pourquoi) et au bout de quelques opérations le dessin ne permet plus de distinguer le cercle et le polygone.

Portons maintenant les périmètres sur une demi-droite à partir d'un point I ; nous aurons la figure ci-après.

On démontre qu'il existe un point L, compris entre C et C'; entre O et O', etc., dont les points C, O, D,... et C', O', D'... se rapprochent autant qu'on veut, les premiers restant en deçà, les

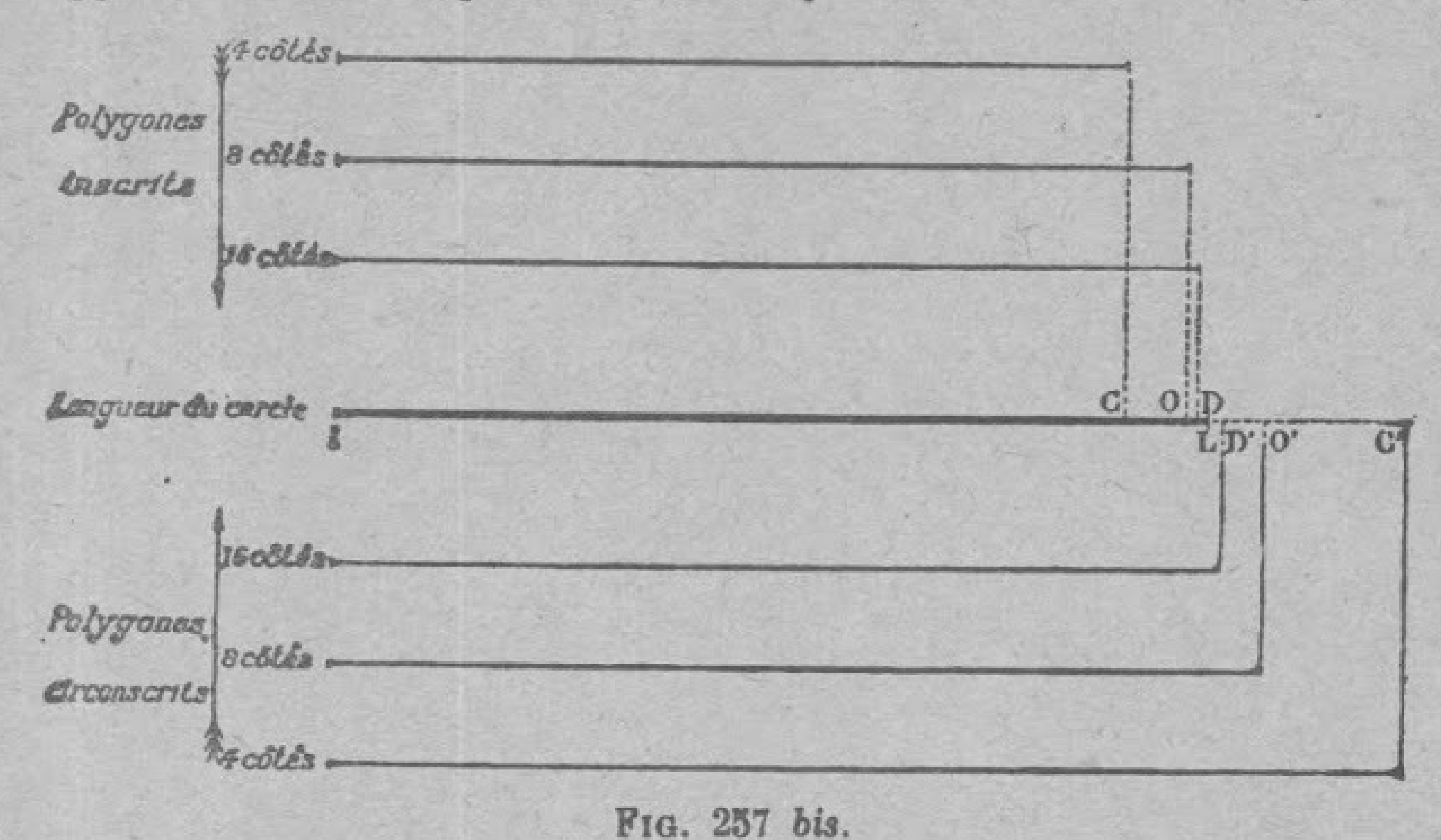


FIG. 257 *bis*.

autres au delà. On démontre encore qu'en partant d'un autre polygone que le carré, — du triangle équilatéral, par exemple, — on obtient le même point L.

La longueur IL s'appelle **longueur du cercle**.

Ce qu'on vient d'expliquer s'exprime en disant que :

497. — *La* **longueur d'un cercle** *est la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone régulier, inscrit ou circonscrit, dont on double indéfiniment le nombre des côtés.*

498. Existence du nombre π. — Le périmètre d'un polygone régulier inscrit (hexagone par exemple), donne de cette longueur une valeur approchée par défaut : 6R, et le périmètre d'un polygone régulier circonscrit (carré par exemple) une valeur approchée par excès : 8R.

Ainsi, *quel que soit le cercle*, sa longueur, en désignant par R le rayon, est comprise entre 6R et 8R, — ou entre 3 diamètres et 4 diamètres.

Nous allons montrer, en généralisant cette remarque, que :

499. Théorème. — *La longueur d'un cercle s'obtient en multipliant le diamètre par un nombre constant*, (c'est-à-dire le même pour tous les cercles), *qu'on désigne par π.*

Considérons en effet plusieurs cercles de rayons R, R' R''... et inscrivons dans chacun un carré, un octogone régulier, ...

Les polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables. Donc les périmètres des polygones réguliers du même

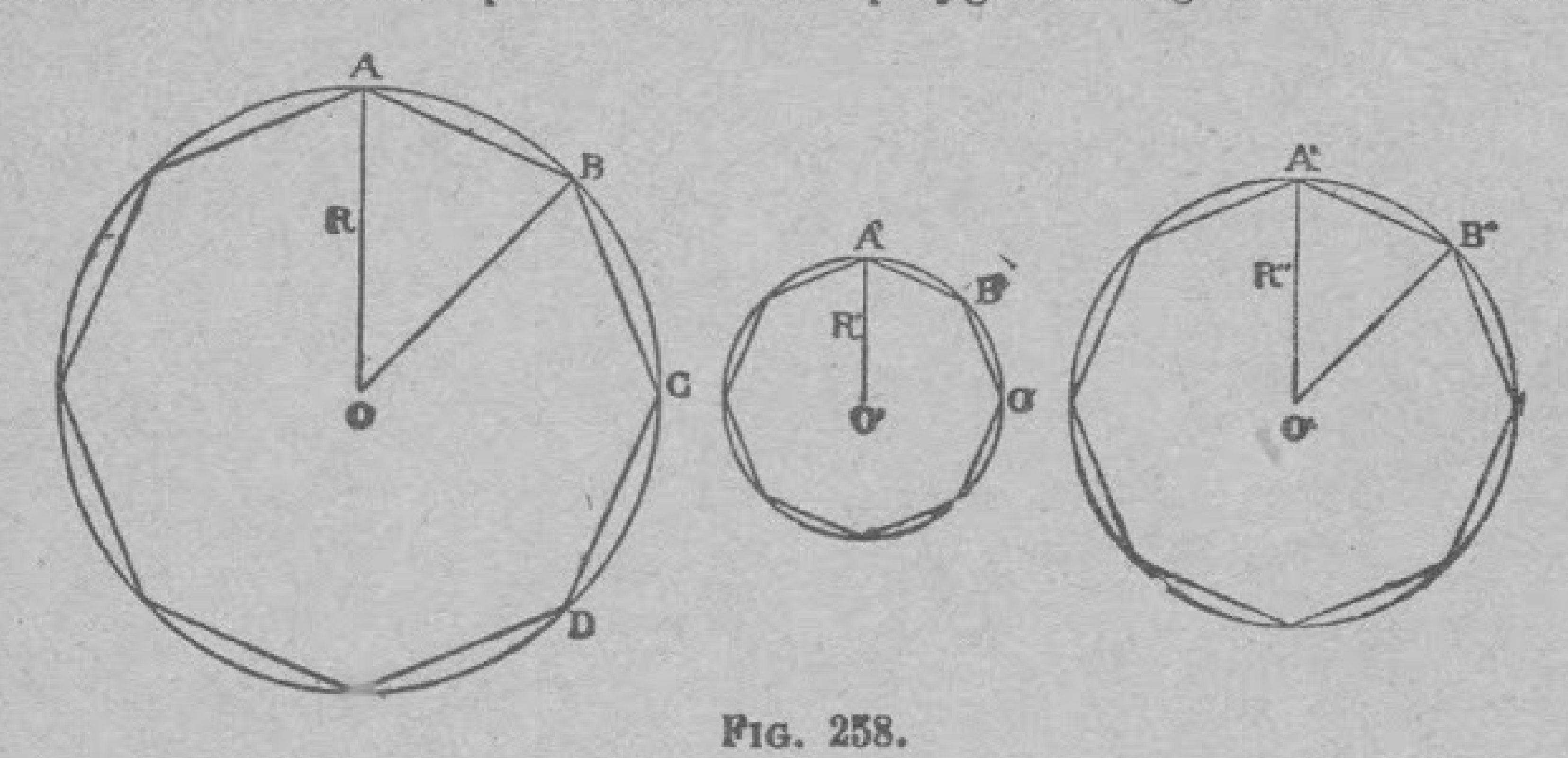


FIG. 258.

genre sont proportionnels aux rayons, — ou, si on veut, aux diamètres. En d'autres termes, qu'il s'agisse de carrés, d'octogones, etc., on a :

$$\frac{\text{Périm. ABCD}\ldots}{2R} = \frac{\text{Périm. A'B'C'}\ldots}{2R'} = \frac{\text{Périm. A''B''C''}\ldots}{2R''} = \ldots.$$

Nous admettrons que lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment, la proportionnalité subsiste entre les longueurs des cercles et leurs diamètres :

$$\frac{\text{Long. du cercle O}}{2R} = \frac{\text{Long. du cercle O'}}{2R'} = \frac{\text{Long. du cercle O''}}{2R''} = \ldots.$$

On a l'habitude de désigner la valeur constante de ces quotients par la lettre grecque π. Donc L étant la longueur du cercle de rayon R, on a :

$$\frac{L}{2R} = \pi.$$

$L = 2R \times \pi$ (ce qui démontre la proposition annoncée), ou (formule à savoir)

$$L = 2\pi R. \qquad (1)$$

500. Valeur du nombre π.

A 0,01 près $\pi = 3{,}14$.
A 0,0001 près $\pi = 3{,}1416$.

501. Remarque. — La formule (1) est une relation entre L et R : connaissant l'un de ces nombres, elle permet de calculer l'autre. Elle permet de résoudre les deux problèmes suivants :

I. *Connaissant le rayon d'un cercle, calculer sa longueur* : $L = 2\pi R$.

II. *Connaissant la longueur d'un cercle, calculer son rayon.*

On tire de (1) :

$$R = \frac{L}{2\pi} = \frac{L}{2} \times \frac{1}{\pi}.$$

Il est bon de calculer, une fois pour toutes, $\frac{1}{\pi}$:

à 0,01 près $\frac{1}{\pi} = 0,32$ (par excès).

à 0,0001 près $\frac{1}{\pi} = 0,3183$ (par défaut).

Exercices.

502. — Quelle est la longueur d'un cercle dont le rayon est 7^m?

503. — On veut établir une piste circulaire dont la longueur soit $2^{km},500$. Quel rayon faut-il lui donner?

504. — Une bobine comprend 200 spires de fil fin enroulées côte à côte; chaque spire a 125^{mm} de diamètre; quelle est la longueur du fil?

505. — Une piste circulaire de $6^m,50$ de largeur a une longueur de 128^m comptée sur le bord intérieur; quelle est la longueur, comptée sur le bord extérieur?

506. — Un bassin circulaire dont le tour a 85^m est entouré d'une grille de $91^m,30$ de longueur; à quelle distance du bord la grille est-elle posée?

507. Longueur d'un arc de cercle.

Soit $\widehat{AB}$ un arc de g grades, pris sur un cercle de rayon R; la longueur d'un arc de 1^{gr} est $\frac{2\pi R}{400}$ ou $\frac{\pi R}{200}$; la longueur d'un arc de g grades est donc

$$l = \frac{\pi R g}{200}. \qquad (2)$$

Cette formule établit une relation entre R, g, l. Connaissant deux de ces nombres elle permet de calculer le troisième.

Elle donne :

$$R = \frac{l \times 200}{\pi g} \qquad g = \frac{l \times 200}{\pi R},$$

égalités qu'il est inutile d'apprendre par cœur.

Exercices.

508. — Quelle est la longueur d'un arc de $85^{gr},3$ pris sur un cercle de 15^m de rayon?

509. — Sur un cercle un arc de $23^{gr},6$ mesure $8^m,4$. Quel est le rayon du cercle?

510. — Sur un cercle de 18^m de rayon on prend un arc de 5^m. Évaluer cet arc en grades.

511. Radian. — Sur un cercle de 18^m de rayon on prend un arc de 18^m. Évaluer cet arc en grades.

512. — Sur un cercle de rayon R on prend un arc dont la longueur est égale au rayon. Évaluer cet arc en grades.

On trouve :

$$x = \frac{R \times 200}{\pi \times R} = \frac{200}{\pi} = 200 \times \frac{1}{\pi}$$
$$x = 200 \times 0,3183 = 63^{gr},66.$$

Ce résultat ne dépend pas du cercle choisi.

Cet arc dont la longueur est égale au rayon s'appelle radian.

L'angle au centre qui intercepte un arc de un radian s'appelle angle de un radian.

Exercices et constructions.

513. — On arrondit les quatre angles d'un carré de côté a de la manière suivante : on partage tous les côtés en trois parties égales et par les points de division on mène des perpendiculaires aux côtés; les perpendiculaires aux points de division M, N, voisins d'un sommet se coupent en un point I; on trace l'arc de cercle MN de centre I. On fait de même aux autres sommets. Calculer le périmètre du contour arrondi ainsi obtenu.

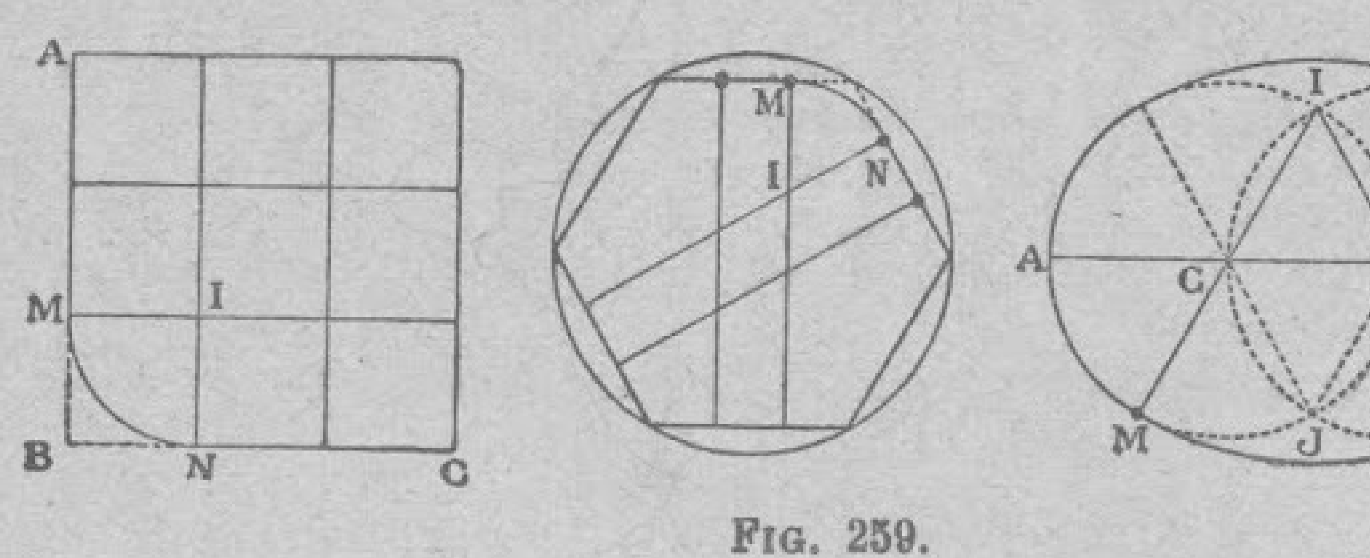


Fig. 259.

514. — Même construction et même calcul avec le triangle équilatéral de côté a.

Même construction et même calcul avec l'hexagone régulier de côté a.

515. — Diviser un segment AB de 120^{mm} en trois parties égales par les points C et D. On trace de C et D comme centres des cercles de 40^{mm} de rayon; ils se coupent en I et J. On marque sur ces cercles les points M et N

diamétralement opposés au point I et on trace l'arc de cercle $\overset{\frown}{MN}$ de centre I; on opère de même avec le point J. On a ainsi un ovale dont on demande d'évaluer la longueur. (fig. 259).

PROBLÈMES SUR LA DEUXIÈME PARTIE

1. — On donne deux droites qui se coupent en A et un point S; mener par S une droite qui forme avec les droites données un triangle ABC dans lequel AB soit double de AC.

2. — Étant donné deux cercles de centre O et O′ on trace deux rayons parallèles et de même sens OA, O′A′; montrer que la droite AA′ rencontre la droite des centres en un point fixe.

3. — Même question avec des rayons parallèles et de sens contraires.

4. — Soit un triangle ABC, AM sa médiane. Par un point quelconque P du segment BC, on mène une parallèle à MA, qui coupe la droite AB en F et la droite AC en E.

1° Trouver un rapport égal à $\frac{PE}{MA}$ et un rapport égal à $\frac{PF}{MA}$. En déduire que

$$PE + PF = 2MA.$$

2° Démontrer que $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AC}$. (Chercher un rapport égal à chacun d'eux.)

5. — Soit un segment AB situé tout entier d'un même côté d'une droite xy; M le point de ce segment tel que MA=2MB; AA′, BB′, MM′, les distances des trois points A, B, M à la droite xy. Connaissant AA′ et BB′, calculer MM′.

6. — Soit un triangle ABC situé tout entier d'un même côté d'une droite xy, G le point de rencontre des médianes, AA′, BB′, CC′, GG′, les distances des quatre points ABCG à la droite xy. Connaissant AA′, BB′, CC′ calculer GG′.

7. — Deux cercles se coupent en A et I; une droite mobile issue de I coupe le premier cer le en B et le deuxième en C. Démontrer que tous les triangles ABC obtenus sont semblables. (Plusieurs cas de figure suivant que A et B sont de part et d'autre de I, ou d'un même côté de I.)

8. — Soit un demi-cercle de diamètre AB; on considère le rectangle ABCD dans lequel le côté CD est tangent au demi-cercle; sa diagonale AC coupe le cercle au point M. Montrer que la droite BM partage CD en deux segments dont l'un est triple de l'autre.

9. — Soit AD, BE deux hauteurs d'un triangle ABC, H leur point de rencontre. Démontrer que :

1° Ces hauteurs sont inversement proportionnelles aux côtés correspondants;

2° $$HD \times HA = HE \times HB.$$

3° $$DB \times DC = DA \times DH.$$

(Deux cas de figure suivant que le triangle a un angle obtus ou non.)

10. — Aux extrémités du diamètre fixe AB d'un cercle O de rayon R, on mène les tangentes; une tangente mobile les coupe en C et D.

1° Démontrer que dans le trapèze rectangle ACDB, le côté oblique CD est toujours égal à la somme des bases AC et BD.

2° Que peut-on dire de l'angle COD?

3° Démontrer que le produit AC × BD a toujours la même valeur.

11. — Construire un triangle connaissant deux angles et une médiane. Laisser d'abord de côté, la donnée « médiane » : que peut-on dire de tous les triangles répondant à la question?)

12. — Construire un triangle connaissant deux angles et le périmètre.

13. — Construire un triangle connaissant deux angles et une hauteur.

Soit un triangle ABC rectangle en A, AH sa hauteur. Connaissant deux des segments de la figure, calculer les autres. Données (en cm) :

14.	AB = 56	AC = 33
15.	AB = 97	AH = 72
16.	BC = 17,4	AH = 6
17.	AB = 17	BH = 8

18. — Connaissant l'hypoténuse BC = 29cm et un côté de l'angle droit, AB = 20cm d'un triangle rectangle, calculez : 1° les trois médianes; 2° le rayon du cercle inscrit.

19. — Dans un trapèze ABCD, rectangle en A et D, on connait (unité : cm) les bases AB = 15, DC = 9 et la diagonale BD = 17. Calculer les côtés AD et BC.

20. — On connaît (unité : cm) le côté AB = 17 et une diagonale AC = 30 d'un losange ABCD. Calculer la deuxième diagonale et le rayon du cercle inscrit (voir exercice 40, p. 94).

21. — On connaît les bases 126cm et 66cm, et la hauteur 40cm d'un trapèze isocèle. Calculer les côtés égaux, leur distance au centre du cercle circonscrit et le rayon de ce cercle.

22. — 1° Autour d'un point fixe S pivote une droite mobile SBC qui rencontre en B et C un cercle donné O. Quel est le lieu géométrique du milieu M du segment BC?

2° Par les points B et C et un point fixe A on fait passer un cercle; montrer que ce cercle passe par un deuxième point fixe et en déduire le lieu de son centre.

23. — Sur le prolongement de la base BC d'un triangle isocèle ABC, on prend un point S que l'on joint au sommet A. Démontrer que

$$SB \times SC = \overline{SA}^2 - \overline{AB}^2.$$

Comment modifier l'énoncé lorsque S est sur le segment BC?

24. — Que peut-on dire d'un polygone convexe dont tous les sommets sont sur un même cercle et dont tous les côtés sont tangents à un cercle concentrique au premier?

25. — Etant donné 7 cercles égaux (sept pions d'un jeu de dames), montrer qu'on peut les disposer de manière que 6 d'entre eux soient tangents extérieurement au 7e et que 2 cercles voisins soient eux-mêmes tangents.

26. — On considère un cercle O de rayon R et un cercle de rayon double 2R qui passe par le centre O du premier. Les tangentes communes ADB, AEC à ces deux cercles se coupent en A, touchent en B et C le grand cercle, en D et E le petit cercle.

1° Etudier le triangle ABC (calcul de ses angles, particularité que présente le côté BC).

2° On considère le contour BOCEDB (BOC, arc du grand cercle; CE, droite; ED, arc du petit cercle; DB, droite). Calculez sa longueur, connaissant le rayon R du petit cercle.

TROISIÈME PARTIE

AIRES

---

§ 1. — UNITÉS DE SURFACE

Une ligne fermée, courbe ou polygone, (non croisée), limite une certaine portion du plan qu'on appelle **sa surface**. Le nombre qui mesure une surface s'appelle son *aire*.

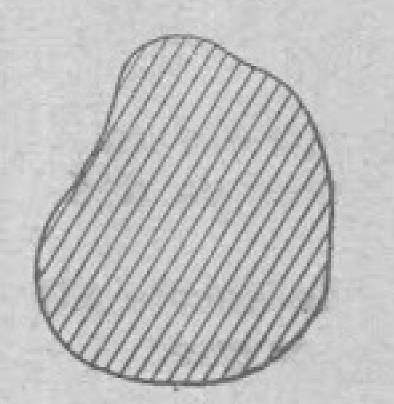
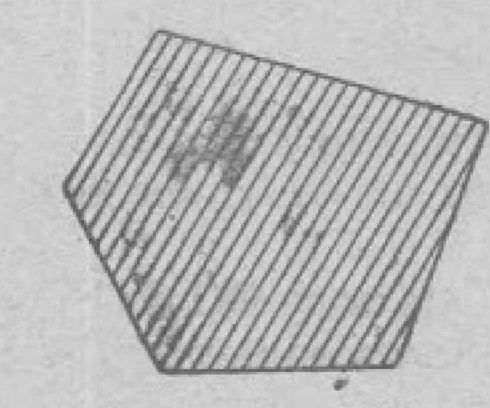
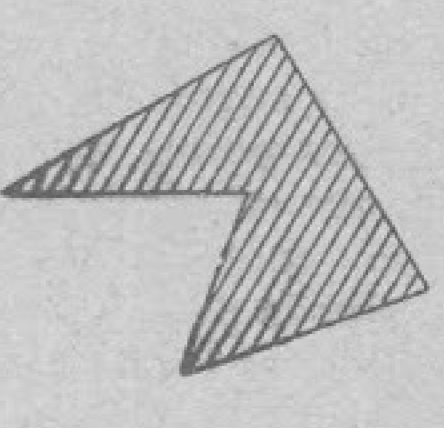




Fig. 260.

Nous allons apprendre à mesurer les surfaces les plus simples.

516. Unité de surface. — *L'unité de surface est la surface du carré qui a pour côté l'unité de longueur* :

Si on évalue les longueurs en *mètres*, l'unité de surface est le **mètre carré** (carré de 1^m de côté);

Si on évalue les longueurs en **centimètres**, l'unité de surface est le **centimètre carré** (carré de 1^{cm} de côté), etc.

Dans le système métrique, l'*unité principale* de surface est le *mètre carré* (m^2), les unités secondaires sont :

ses *multiples :*

décamètre carré	dam^2
hectomètre carré	hm^2
kilomètre carré	km^2

et ses *sous-multiples :*

décimètre carré	dm^2
centimètre carré	cm^2
millimètre carré.	mm^2.

Chaque unité vaut 100 unités de l'ordre immédiatement inférieur ; ainsi par exemple, 1^{dm^2} vaut 100^{cm^2}.

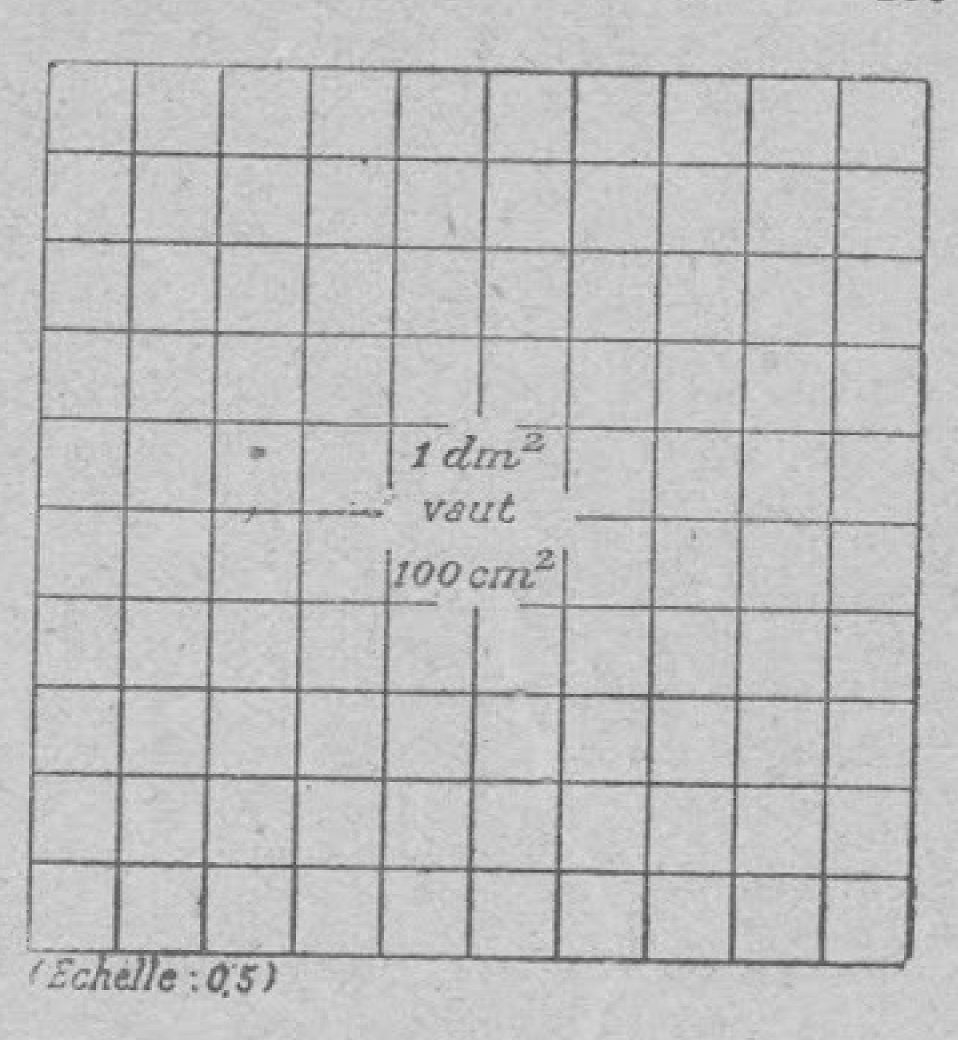


Fig. 261.

517. — Lecture, Écriture et Changement d'unité.

Soit la surface mesurée par le nombre $25\,904^{m^2},38715$. Partageons la partie entière et la partie décimale en tranches de deux chiffres à partir de la virgule (en complétant au besoin par un zéro la dernière tranche **à** droite).

$2\ 59\ 04^{m^2},38\ 71\ 50$ ou $2^{hm^2}\ 59^{dam^2}\ 04^{m^2}\ 38^{dm^2}\ 71^{cm^2}\ 50^{mm^2}$.

Cet exemple conduit aux trois règles suivantes :

I. — **Pour lire** *un nombre exprimant une surface, on lit d'abord la partie entière puis la partie décimale (complétée au besoin par un zéro) suivie du nom de l'unité qu'elle représente.*

$7^{m^2},0458$	se lit	$7^{m^2}\ 458^{cm^2}$	$0^{hm^2},634$	se lit	$6\,340^{m^2}$
$513^{dm^2},6$	—	$513^{dm^2}\ 60^{cm^2}$.	$3^{dam^2},00215$	—	$3^{dam^2}\ 2150^{cm^2}$.

II. — **Pour** écrire *un nombre exprimant une surface, on écrit d'abord la partie entière, puis la partie décimale, en ayant soin de représenter chaque unité de surface par une tranche de deux chiffres.*

On remplace par des zéros les chiffres ou les tranches qui peuvent manquer.

Ainsi, en prenant le mètre carré pour unité :

$3^{m^2}\ 42^{dm^2}\ 8^{cm^2}$	s'écrit	$3^{m^2},4208$	$5^{dam^2}\ 34^{dm^2}$	s'écrit	$500^{m^2},34$
$17^{m^2}\ 4^{cm^2}$	—	$17^{m^2},0004$.	$4^{hm^2}\ 8^{m^2}$	—	$40\,008^{m^2}$.

III. — *Pour changer d'unité de surface*, on lit les unités représentées par chaque tranche de deux chiffres du nombre donné et on place la virgule à droite de la tranche qui exprime la nouvelle unité.

On remplace par des zéros les chiffres ou les tranches qui peuvent manquer.

$3^{km^2},72956 = 37\,295^{dam^2},6$	$40\,837^{dm^2} = 4^{dam^2},0837$
$7^{hm^2}4, = 7\,400\,000^{dm^2}$.	$125^{mm^2} = 0^{dm^2},0125$.

518. Mesures agraires (terrains). — On prend pour unité l'*are* (a) qui équivaut au dam^2; il a un multiple : l'hectare (ha) qui vaut 100 ares, et **un sous-multiple :** le centiare (ca) qui est le centième d'un are :

hm^2	dam^2	m^2
ha	a	ca.

Il n'existe pas de **mesures effectives** (instruments) de surface; pour mesurer une surface, on mesure certaines longueurs de la figure et on applique les règles que nous allons étudier.

519. Définition. — *Quand deux surfaces ont la même aire* (c'est-à-dire qu'elles sont mesurées par le même nombre) *on dit qu'elles sont* **équivalentes**.

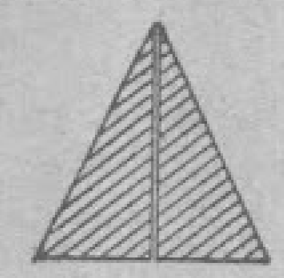
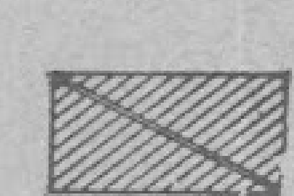
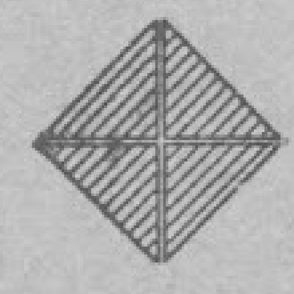
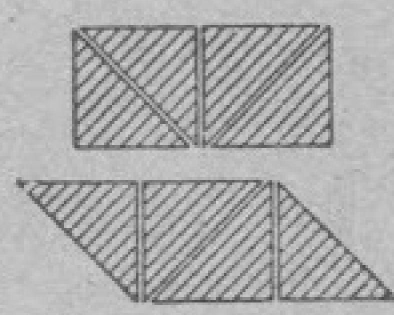





FIG. 262. — Surfaces équivalentes.

Rappelons la convention fondamentale que nous observerons dan tout ce qui suit :

520. Convention fondamentale. — *Toutes les longueurs sont mesurées avec la même unité; les surfaces sont mesurées avec l'unité correspondante.*

§ 2. — AIRE DU RECTANGLE

521. Théorème. — *L'aire d'un rectangle est égale au produit de ses deux dimensions.*

Soit un rectangle ABCD; a et b les longueurs des côtés AB, BC. Je dis que

$$S = a . b.$$

Pour le démontrer nous distinguerons deux cas :

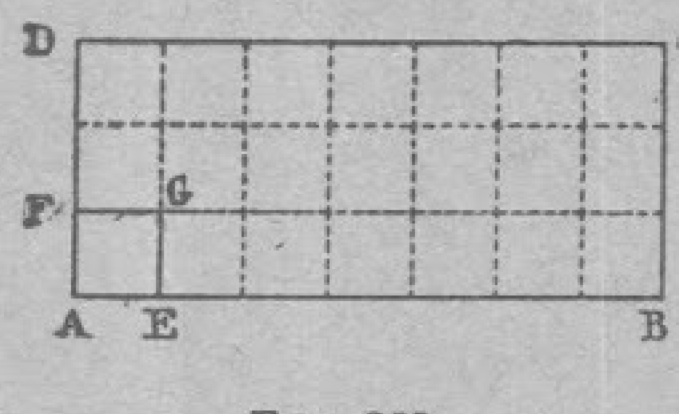


FIG. 263.

1° *Les nombres a et b sont entiers.* Par exemple, l'unité de longueur étant le décimètre, $a = 3$, $b = 7$. Marquons (fig. 263) les points qui partagent les côtés AB, BC en sept et trois parties égales (dm) et par ces points menons des parallèles à AB et BC. Elles décomposent le rectangle en sept **bandes** contenant chacune 3 dm². Donc :

$$S = \text{dm}^2 \quad 3 \times 7.$$

2° *Les nombres a et b sont quelconques.* Par exemple, l'unité de longueur étant le décimètre, $a = 3{,}4$; $b = 8{,}07$.

Prenons pour unités le millimètre et le millimètre carré; les côtés seront mesurés par 340 et 807, et on aura (1re partie) :

$$S = \text{mm}^2 . 340 \times 807$$

ou

$$S = \text{dm}^2 . \frac{340 \times 807}{100^2} = \text{dm}^2 . \frac{340}{100} \times \frac{807}{100}.$$

ou encore $S = \text{dm}^2 \; 3{,}4 \times 8{,}07$.

C'est le résultat annoncé.

522. CONSÉQUENCE. — *L'aire d'un carré est égale à la deuxième puissance de son côté* : $S = a^2$.

(C'est de là que vient le mot **carré** pour désigner la deuxième puissance.)

523. REMARQUE I. — On appelle quelquefois **base** d'un rectangle, l'un des côtés, et **hauteur**, l'autre côté. L'énoncé du n° 521 prend alors la forme suivante :

L'aire d'un rectangle est égale au produit de sa base par sa hauteur : $S = bh$.

524. REMARQUE II. — Connaissant deux des trois nombres S, b, h la formule précédente permet de calculer le troisième; elle donne par exemple $h = \frac{S}{b}$.

De même la formule $S = a^2$ permet de calculer le côté d'un carré, connaissant la surface : $a = \sqrt{S}$.

Constructions et Manipulations.

525. — Découper un carré de côté a, un carré de côté b et deux rectangles de dimensions a, b; assembler ces quatre figures de manière à montrer que

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

526. — Découper (dans une feuille double) un rectangle de dimensions a, $a - b$ et un rectangle de dimensions $a - b$, b ($a > b$); assembler ces deux figures de deux façons différentes de manière à montrer que (fig. 264)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

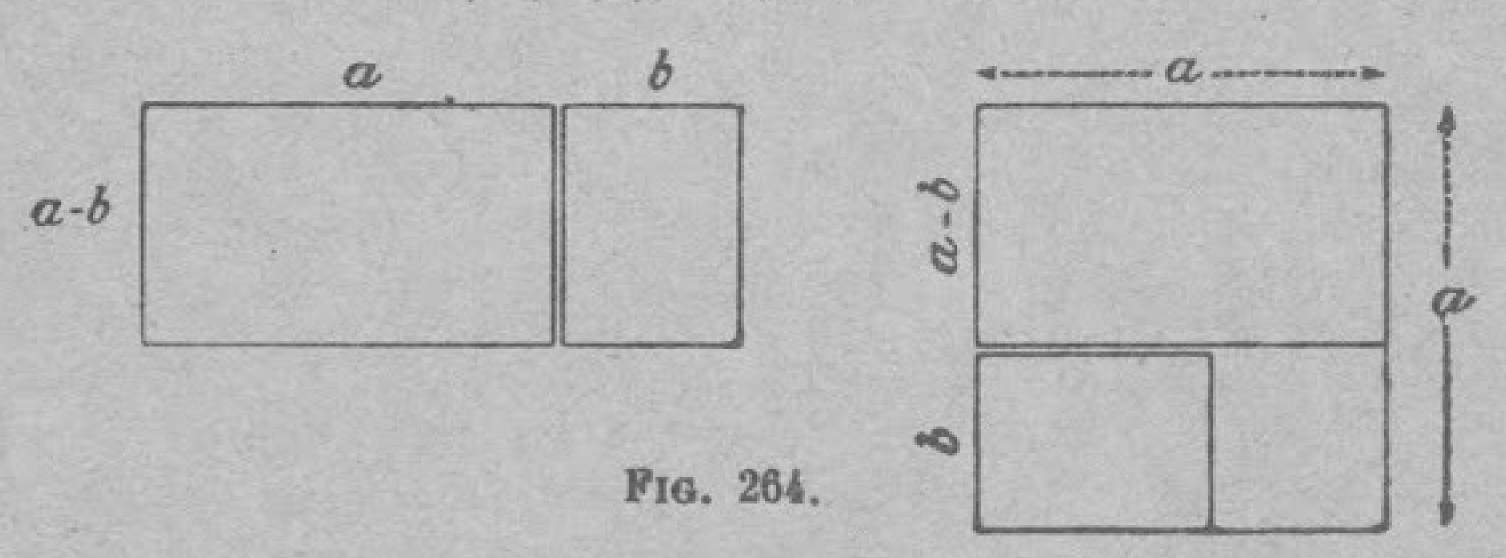


FIG. 264.

527. — Dans un carré de côté $a + b$ ($a > b$) tracer les parallèles à deux côtés consécutifs, aux distances b et $2b$ de chacun de ces côtés. Découper le carré de manière à montrer que

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab.$$

§ 3. — AIRE DU PARALLÉLOGRAMME

528. Définitions. — On appelle **base** d'un parallélogramme l'un quelconque des côtés et **hauteur correspondante** la distance de ce côté au côté opposé.

Exemple : AD et DI, AD et BH (fig. 265).

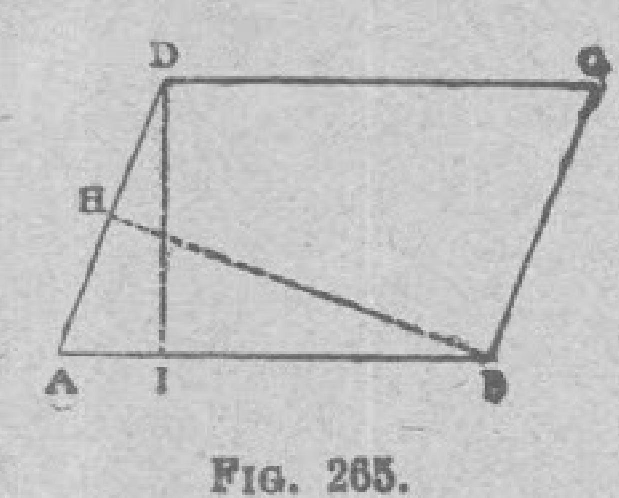


Fig. 265.

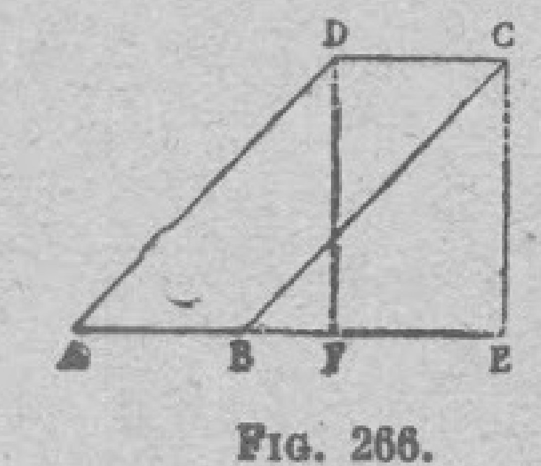


Fig. 266.

529. Théorème. — *L'aire d'un parallélogramme est égale au produit de sa base par sa hauteur* fig. 266).

Soit le parallélogramme ABCD. Menons des points C et D les perpendiculaires CE, DF sur la droite AB. Les triangles rectangles ADF, BCE sont égaux comme ayant l'hypoténuse égale $AD = BC$ et un angle aigu égal : $\widehat{DAF} = \widehat{CBE}$.

Imaginons qu'on ajoute d'abord au parallélogramme le triangle BCE, puis que, du trapèze rectangle ainsi obtenu, on retranche le triangle ADF. (Ces opérations sont toujours possibles même quand le point F est extérieur à la base AB.) On obtient ainsi un rectangle CDFE équivalent au parallélogramme. Donc l'aire du parallélogramme est égale à $S = CD \times CE$ ou encore $S = AB \times CE$.

530. Remarque. — Comme un parallélogramme a deux bases et deux hauteurs, on peut calculer son aire de deux façons.

§ 4. — AIRE DU TRIANGLE

531. Définitions. — On appelle **base** d'un triangle l'un quelconque des côtés et **hauteur** la hauteur correspondante :

532. Théorème. — *L'aire d'un triangle est égale au demi-produit de la base par la hauteur.*

Soit le triangle ABC, de base BC et de hauteur AH (fig. 267). Par A et C menons les parallèles aux côtés opposés, se coupant en D. On obtient un parallélogramme ABCD que la diagonale AC coupe en deux triangles égaux (rappeler pourquoi). Donc :

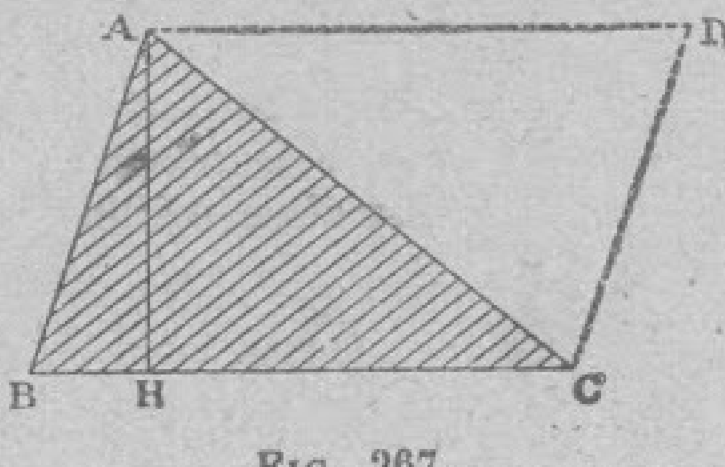


Fig. 267.

$$\text{aire } ABC = \frac{1}{2} \text{ aire } ABCD = \frac{1}{2} BC \times AH.$$

Formule : $S = \frac{1}{2} ah$

d'où on peut tirer

$$a = \frac{2S}{h} \quad \text{ou} \quad h = \frac{2S}{a}.$$

533. Conséquence. — Si on déplace un sommet d'un triangle sur une parallèle à la base, l'aire de ce triangle ne change pas.

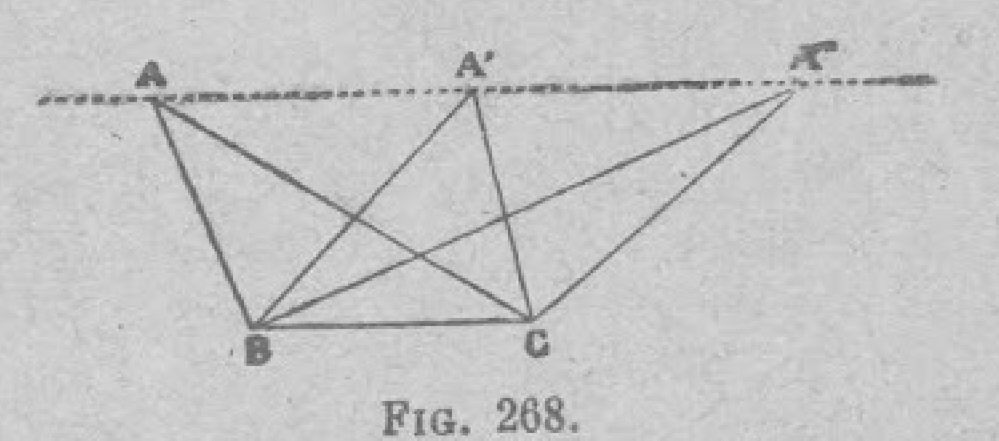


Fig. 268.

534. Remarque I. — Comme on peut prendre pour base un côté quelconque, on peut calculer l'aire d'un triangle quelconque de trois façons.

En particulier, *l'aire d'un triangle rectangle est égale au demi-produit des côtés de l'angle droit.* On retrouve ainsi l'égalité $AB \times AC = BC \times AH$ démontrée au n° 459.

535. Remarque II. — Si deux triangles ont des bases égales, leurs aires sont proportionnelles aux hauteurs; et de même, si les hauteurs sont égales, les aires sont proportionnelles aux bases.

Exercices. 536. — Soit un triangle ABC, I le centre du cercle inscrit, r son rayon, p le demi-périmètre du triangle. Joignant I aux sommets, on décompose le triangle en trois. Démontrer la formule $S = pr$ donnant l'aire du triangle.

536 *bis*. Application. — Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont (unité : cm) 8 et 15. Calculer le rayon du cercle inscrit.

537. — **Aire du triangle équilatéral.**

$$S = \begin{cases} \dfrac{c^2\sqrt{3}}{4} & c \text{ étant le côté} \\[2ex] R^2 . \dfrac{3\sqrt{3}}{4}. & R \text{ le rayon du cercle circonscrit} \\[2ex] a^2 . 3\sqrt{3}. & a \text{ le rayon du cercle inscrit (apothème)} \end{cases}$$

538. — Soit ABC un triangle, AD sa bissectrice intérieure. Comparer les

aires des triangles ADB et ADC en prenant pour bases : 1° DB et DC; 2° AB et AC.

En déduire le théorème, n° 412.

538 *bis*. — Étendre ce raisonnement à une bissectrice extérieure.

539. — Démonstration du théorème de Pythagore par les aires.

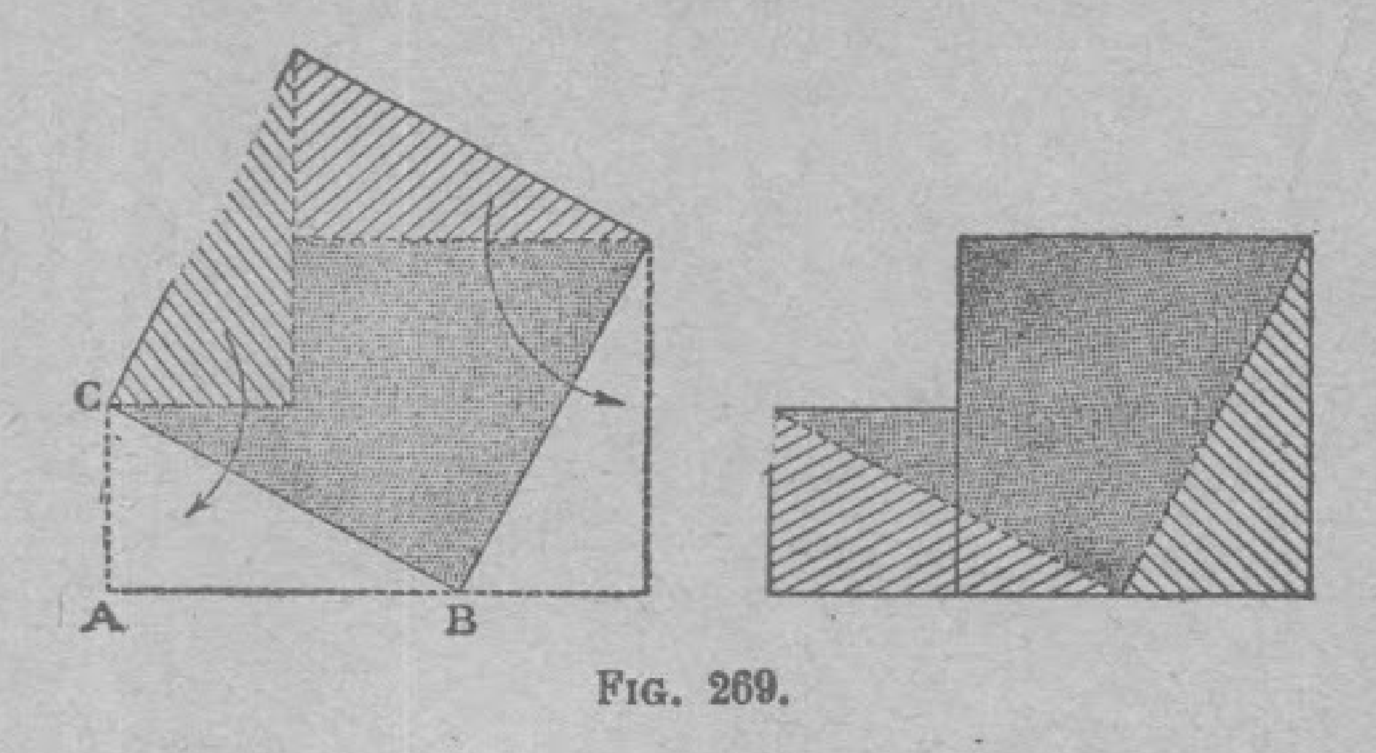


Fig. 269.

§ 5. — AIRE D'UN POLYGONE

540. On décompose ce polygone en parties dont on sait évaluer l'aire, par exemple en triangles. S'il est convexe on peut joindre un point intérieur à tous les sommets et, en particulier, tracer toutes les diagonales issues d'un sommet.

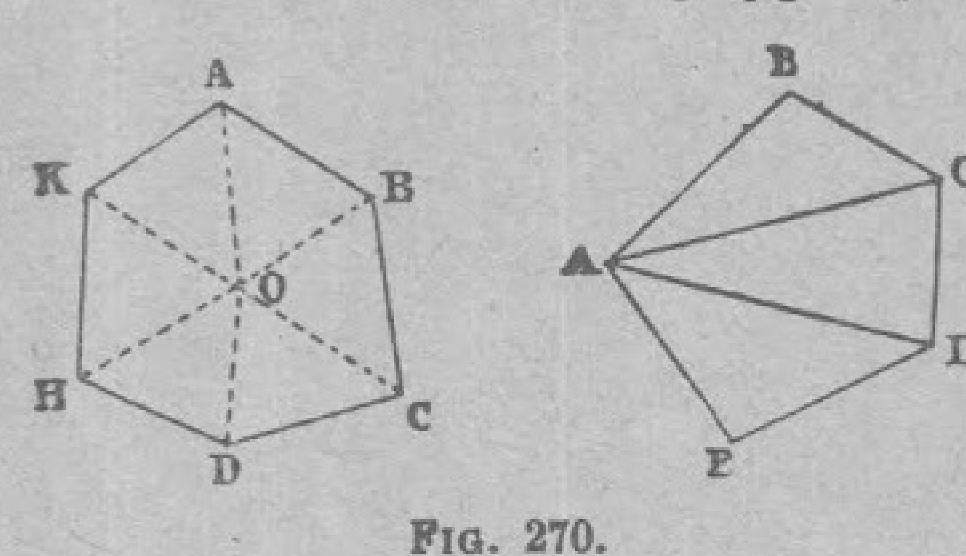


Fig. 270.

541. Aire du trapèze. — *L'aire d'un trapèze est égale au produit de la demi-somme des bases par la hauteur.*

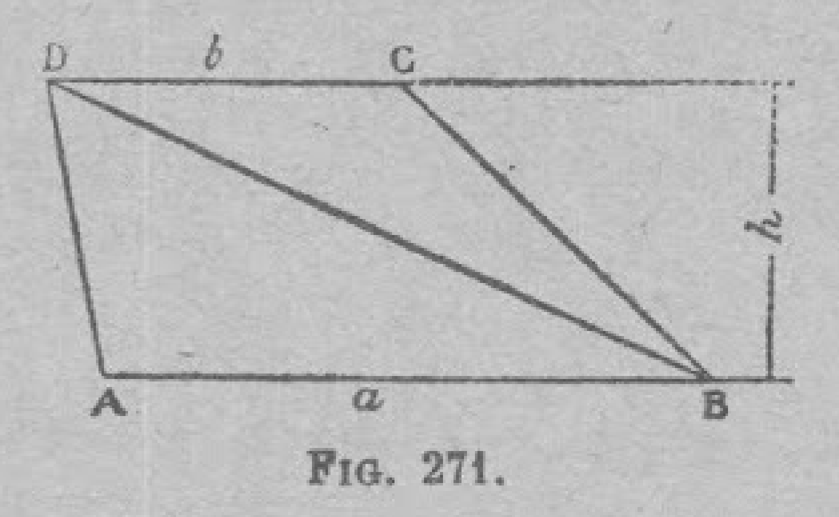


Fig. 271.

Décomposons le trapèze ABCD au moyen de **la diagonale BD et appelons** h la hauteur du trapèze. On voit que :

$$\text{aire ABCD} = \text{aire ABD} + \text{aire BCD}$$
$$= \frac{1}{2}\text{AB} \times h + \frac{1}{2}\text{CD} \times h = \frac{1}{2}h(\text{AB} + \text{CD})$$
$$= \frac{\text{AB} + \text{CD}}{2} \times h.$$

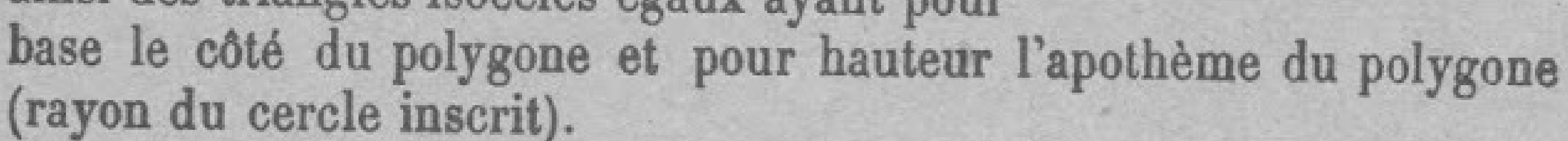
Formule :
$$S = \frac{a+b}{2} \times h.$$

542. **Exercices.** — Un trapèze a une surface de $3^a,36$ et une hauteur de 16^m; l'une des bases est 285^{dm}. Calculer l'autre.

543. **Aire du losange.** — Montrer que l'aire d'un losange est égale au demi-produit des deux diagonales.

544. Aire d'un polygone régulier. — La décomposition en triangles la plus commode consiste à joindre le centre du polygone à tous les sommets. On forme ainsi des triangles isocèles égaux ayant pour

Fig. 272.


base le côté du polygone et pour hauteur l'apothème du polygone (rayon du cercle inscrit).

545. **Exercice.** — Aire de l'hexagone régulier.

c étant le côté	$c^2 . \frac{3\sqrt{3}}{2}$
R le rayon du cercle circonscrit	$R^2 . \frac{3\sqrt{3}}{2}$
a l'apothème	$a^2 . 2\sqrt{3}.$

546. Remarque. — En désignant par n le nombre des côtés, par S l'aire, on a :

$$S = \text{aire AOB} \times n = \frac{1}{2}\text{AB} \times \text{OP} \times n = \frac{1}{2}(\text{AB} \times n)\,\text{OP}$$

$\text{AB} \times n$ est le périmètre. Donc :

Théorème. — *L'aire d'un polygone régulier est égale au demi-produit du périmètre par le rayon du cercle inscrit* (ou *apothème*).

547. **Exercice. Généralisation.** — Montrer que : *L'aire d'un polygone convexe quelconque circonscrit à un cercle est égale au demi-produit de son périmètre par le rayon du cercle.*

548. Polygone quelconque (terrain). — On le décompose en triangles rectangles et en trapèzes rectangles en menant des divers

sommets les perpendiculaires à une diagonale AC. Ces perpendiculaires servent de bases.

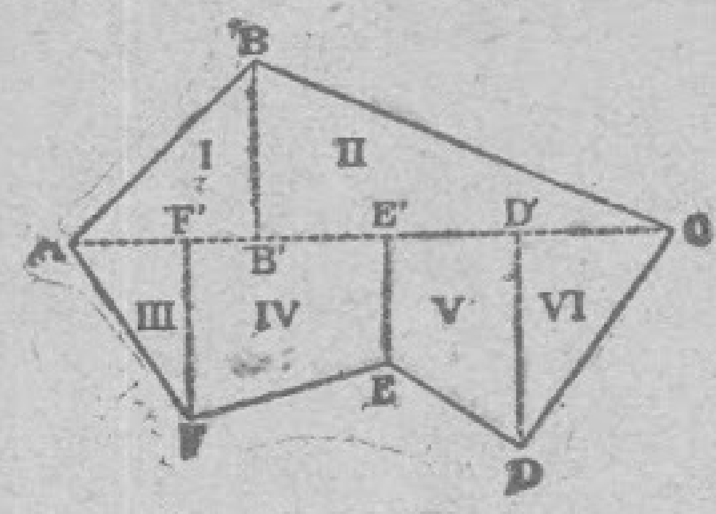


Fig. 273.

Exemple (à compléter.)

Données (m).			Bases	Hauteurs	Superficies
AF' = 4,75	BB' = 8,85	Parcelle I			
F'B' = 2,25		— II			
B'E' = 6,30	DD' = 9,40	— III			
E'D' = 5,80	EE' = 5,10	— IV	7,20 5,10	8,55	52,5825
D'C = 4,90	FF' = 7,20	— V — VI	9,40	4,90	23,03
Total.					240,9625

$S = 240^{m^2},96$ ou, en arrondissant, $S = 242^{m^2}$.

§ 6. — AIRE DU CERCLE

549. — Soit un cercle et un polygone régulier circonscrit.

Nous avons signalé (546) que l'aire de ce polygone est égale au demi-produit du périmètre par le rayon du cercle.

Si on envisage un polygone régulier d'un grand nombre de côtés, on voit que :

1° Sa surface diffère peu de celle du cercle;

2° Son périmètre diffère peu de la longueur du cercle.

Fig. 274.

En imaginant des polygones réguliers ayant de plus en plus de côtés, on prévoit que l'aire du cercle est égale au demi-produit de la longueur du cercle par son rayon.

Nous nous bornerons à signaler ici que cette prévison est exacte

et qu'il est possible de démontrer rigoureusement le théorème suivant :

550. Théorème. — *L'aire d'un cercle est égale au demi-produit de la longueur du cercle par son rayon.*

$$S = \frac{1}{2}LR.$$

En remplaçant L par $2\pi R$, on aboutit à la règle :

551. Règle. — *L'aire d'un cercle de rayon* R *est*

$$S = \pi R^2.$$

Connaissant l'un des nombres S ou R, cette formule permet de calculer l'autre. Elle donne :

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{S \times \frac{1}{\pi}}.$$

552. Secteur circulaire. — **Définition.** *On appelle* **secteur circulaire** *la portion de cercle comprise entre deux rayons*; elle est limitée par un angle au centre et l'arc intercepté.

L'aire d'un secteur de 1^{gr} est $\frac{\pi R^2}{400}$.

L'aire d'un secteur de g grades est $s = \frac{\pi R^2 g}{400}$.

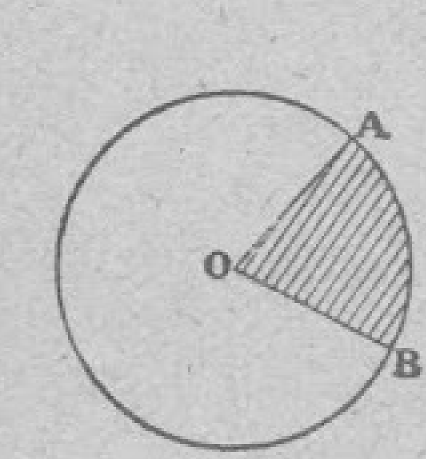


Fig. 275.
Secteur circulaire.

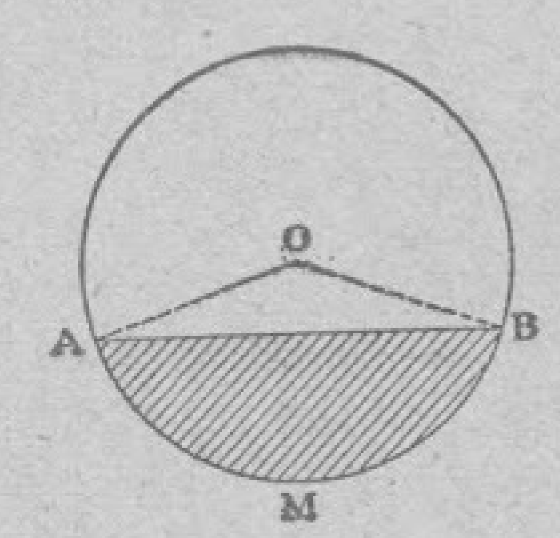


Fig. 276.
Segment de cercle.

553. Segment de cercle. — **Définition.** *On appelle* **segment de cercle** *la portion de plan limitée par un arc et sa corde.*

C'est la différence ou la somme du secteur OAMB et du triangle OAB (*fig.* 276).

§ 7. — SURFACES ÉQUIVALENTES

554. Problème I. — *Construire le carré équivalent à un rectangle donné.*

Soient a et b les côtés du rectangle; son aire est $S = ab$.

Soit x le côté du carré cherché; son aire est $S' = x^2$.

Ces aires doivent être égales :

$$x^2 = ab \quad \text{ou} \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{b},$$

ce qui montre que x est la *moyenne proportionnelle* entre a et b.

Pour **construire** x, on appliquera, par exemple, la 1re construction du n° 470.

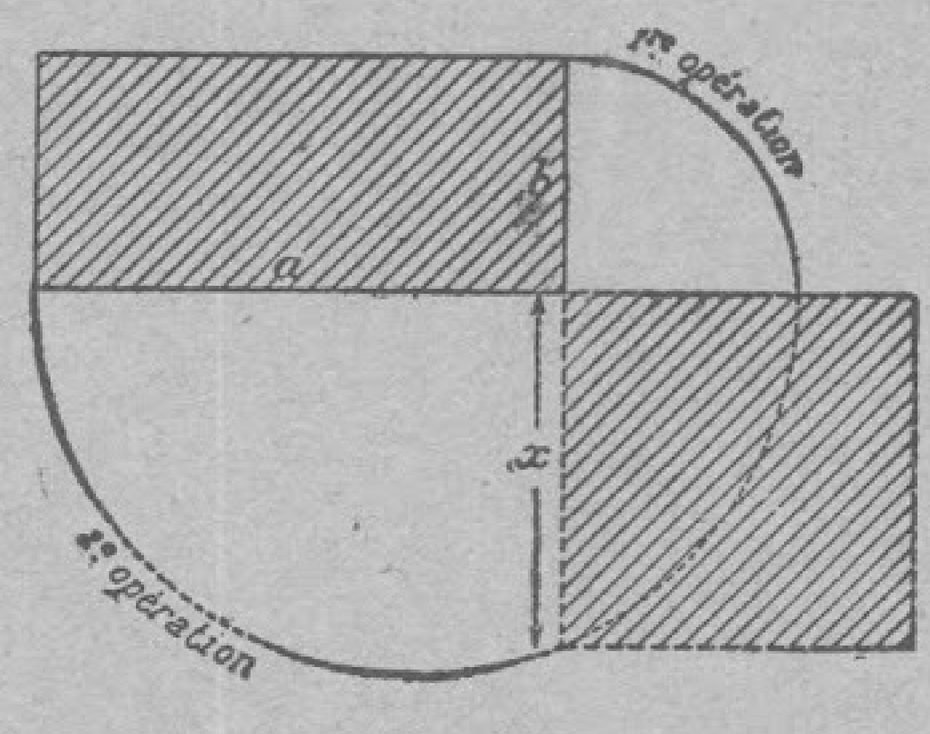


Fig. 277.

On peut aussi **calculer** x à l'aide de la formule $x = \sqrt{ab}$.

555. Problème II. — *Construire un rectangle équivalent à un triangle donné.*

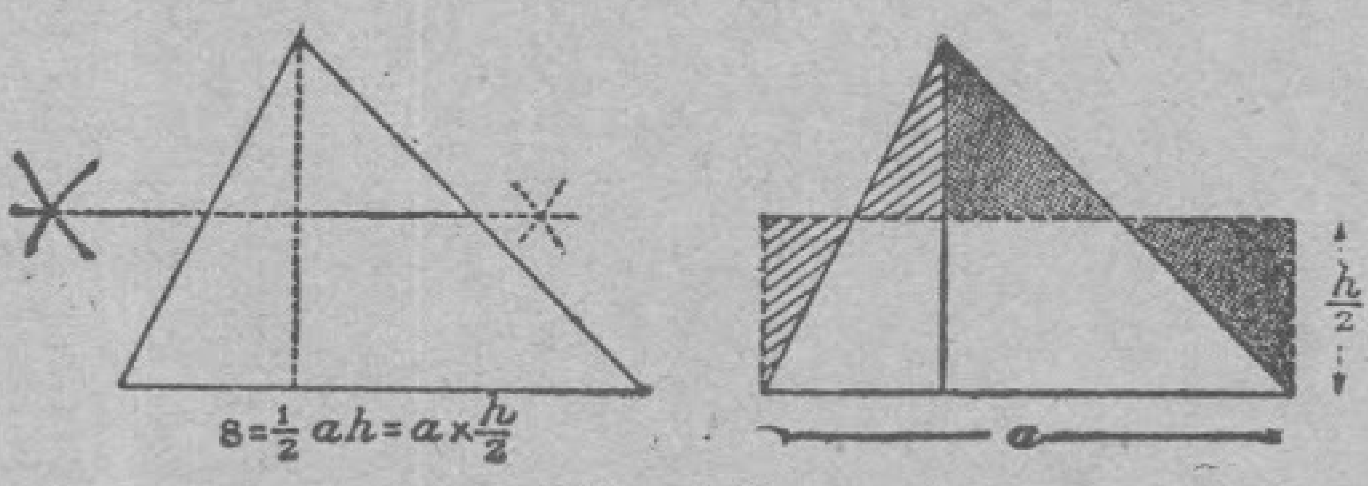
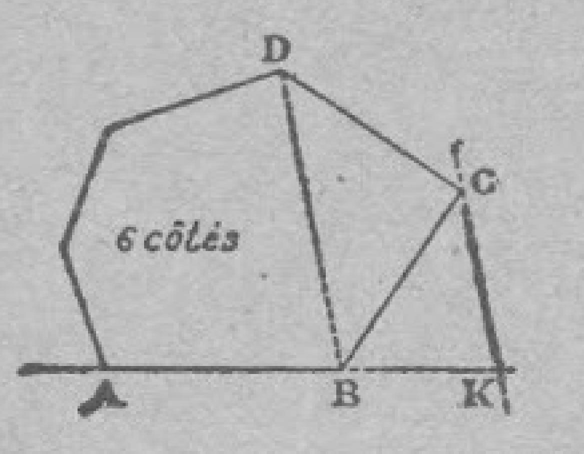


Fig. 278.

Exercice. — **Construire le carré équivalent à un triangle donné.**

556. Problème III. — *Construire un triangle équivalent à un polygone donné.*



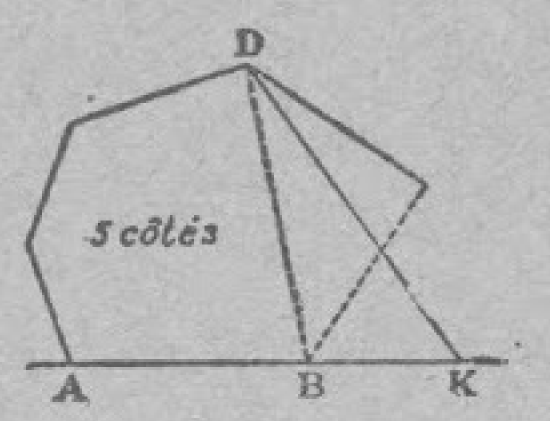


Fig. 279.

En déplaçant le sommet C sur une parallèle à la diagonale DB l'aire du triangle DCB ne change pas : en amenant C en K sur le prolongement de AB, on remplace le polygone par un autre qui a un côté de moins. En recommençant, on arrivera à un triangle.

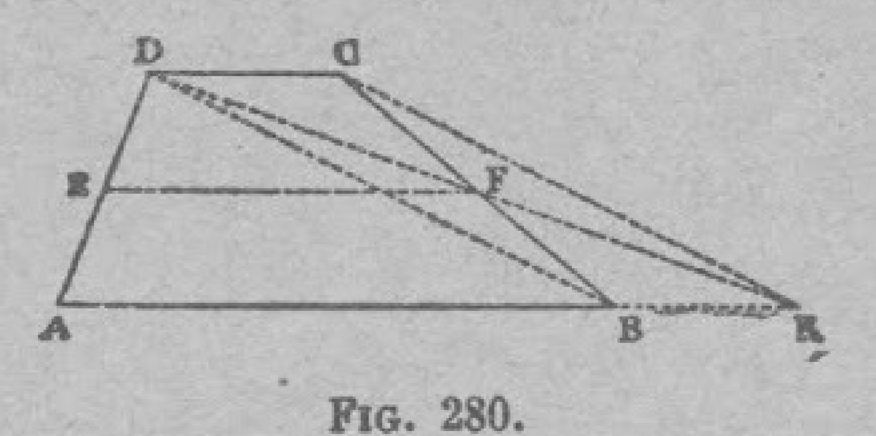


Fig. 280.

557. Application au trapèze. — Remarquer que AK peut être obtenu de deux manières : 1° en menant CK parallèle à DB;
2° en joignant D au milieu de BC.
Retrouver la règle donnant l'aire d'un trapèze.

§ 8. — POLYGONES SEMBLABLES

558. Remarque. — *Si le côté d'un carré est multiplié par 3, sa surface est multipliée par 9.*

C'est cette remarque que nous allons généraliser.

Triangles. — Soit deux triangles semblables dans le rapport de similitude $\frac{2}{3}$: B'C' est les $\frac{2}{3}$ de BC; la hauteur A'H' est les $\frac{2}{3}$ de AH.

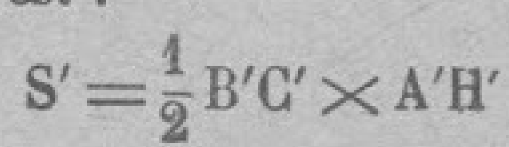


Fig. 281.

Or l'aire du premier est :

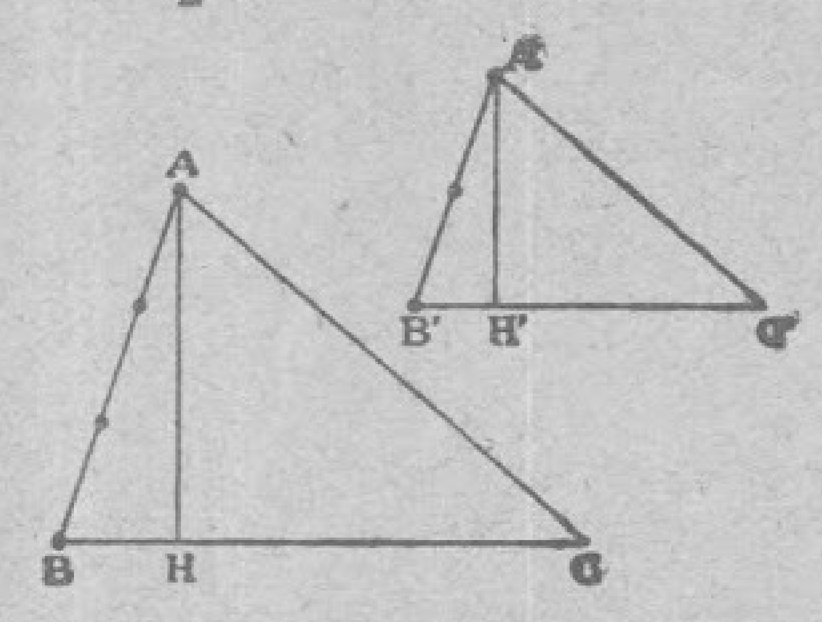
$$S' = \frac{1}{2} B'C' \times A'H'$$

et l'aire du second :

$$S = \frac{1}{2} BC \times AH.$$

Donc

$$\frac{S'}{S} = \frac{\frac{1}{2} B'C' \times A'H'}{\frac{1}{2} BC \times AH} = \frac{B'C' \times A'H'}{BC \times AH} = \frac{B'C'}{BC} \times \frac{A'H'}{AH} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)$$



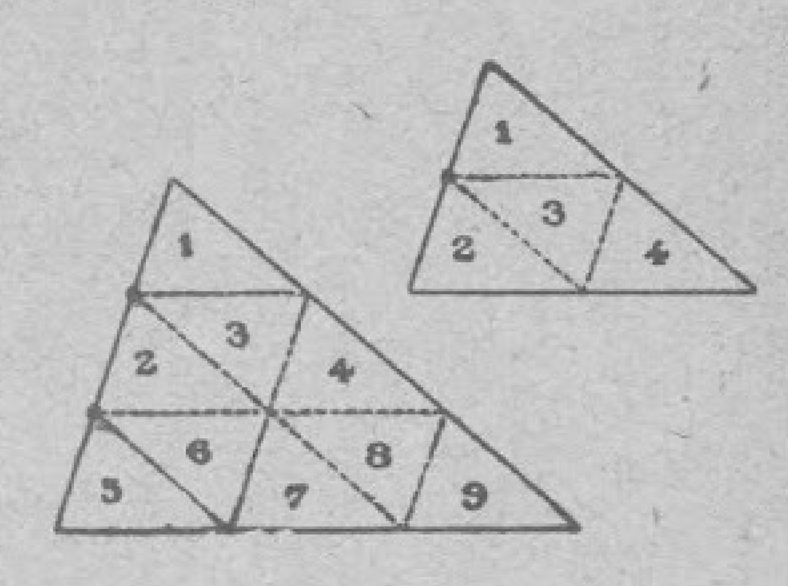


FIG. 282 et 282 *bis*.

On voit que : *le rapport des aires de deux triangles semblables est égal au carré du rapport de similitude.*

Ce résultat est général ; nous allons démontrer que :

559. Théorème. — *Le rapport des aires de deux polygones semblables est égal* **au carré** *du rapport de similitude.*

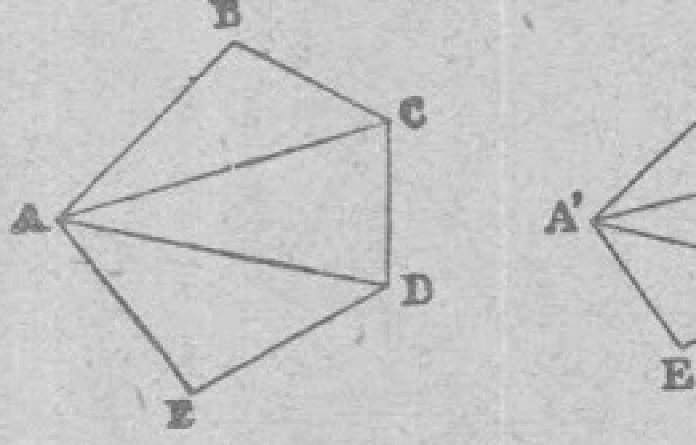


FIG. 283.

Soit en effet deux polygones semblables dans le rapport de similitude $\frac{2}{3}$.

On peut les décomposer en triangles semblables chacun à chacun ; soit a', b', c', et a, b, c les aires de ces triangles. On vient de voir que

$$\frac{a'}{a} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \frac{b'}{b} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \qquad \frac{c'}{c} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Donc, d'après une propriété des rapports égaux :

$$\frac{a' + b' + c'}{a + b + c} = \left(\frac{2}{3}\right)^2,$$

ou en désignant par S' et S les aires des deux polygones :

$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

560. Cercles. Théorème. — *Le rapport des aires de deux cercles est égal au carré du rapport des rayons.*

En effet R' et R étant les rayons, les aires des cercles sont

$$S' = \pi R'^2 \qquad S = \pi R^2.$$

D'où

$$\frac{S'}{S} = \frac{\pi R'^2}{\pi R^2} = \frac{R'^2}{R^2} = \left(\frac{R'}{R}\right)^2.$$

561. Remarque. — Soit deux triangles semblables dans lesquels *deux côtés homologues sont* 5cm *et* 3cm ; leur rapport est $\frac{5}{3}$; c'est le rapport de similitude. Donc :

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2},$$

ou

$$\frac{S}{5^2} = \frac{S'}{3^2}.$$

Les nombres S et S' sont proportionnels aux carrés des côtés homologues.

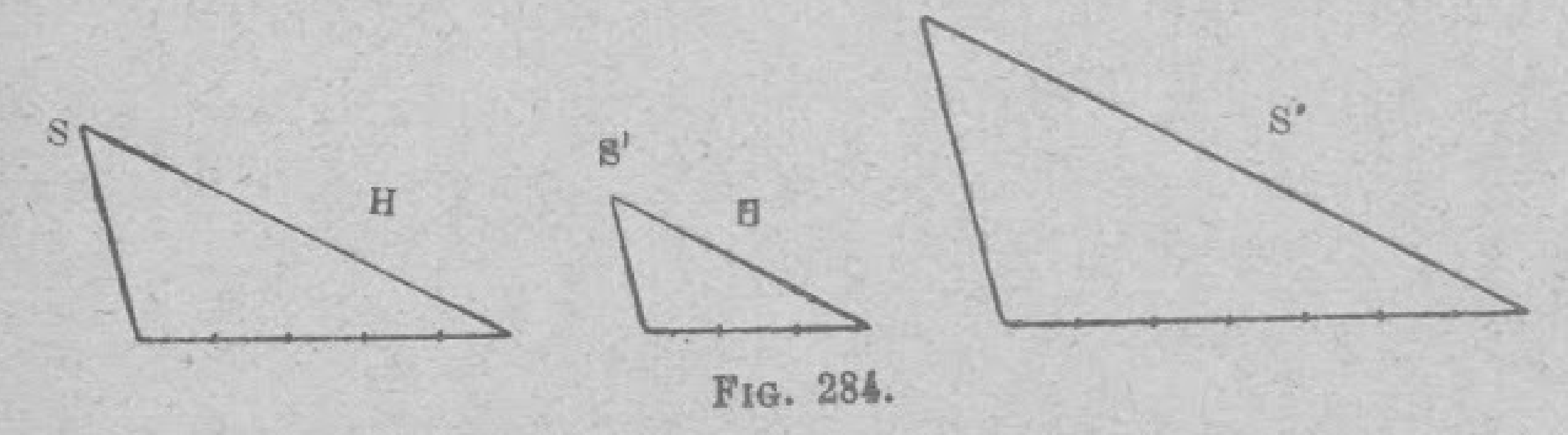


FIG. 284.

De même, si on considère trois triangles semblables *ayant pour côtés homologues* 5cm 3cm *et* 7cm, les aires de ces triangles semblables sont proportionnelles à

25 9 49.

De même encore, si on considère plusieurs polygones semblables *ayant pour côtés homologues* 4cm, 3cm, 7cm les aires de ces polygones semblables sont proportionnelles à

FIG. 285.

16 9 49.

562. Application. — *Étant donné deux polygones semblables, construire un troisième polygone qui leur soit semblable, et dont l'aire soit la somme de leurs aires.*

Soit B, C les aires des deux polygones donnés, A l'aire du polygone inconnu, b, c, a trois dimensions homologues de ces trois polygones.

On vient de voir que

$$\frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}.$$

D'où

$$\frac{A}{a^2}=\frac{B+C}{b^2+c^2}.$$

Si $A=B+C$, on a : $a^2=b^2+c^2$. D'où la **construction : a est l'hypoténuse** du triangle rectangle dont les côtés sont b et c.

Remarque. — Dans le cas du carré on voit immédiatement que le carré construit sur l'hypoténuse est la somme des carrés construits sur les autres côtés.

Exercices.

563. — Trouver un carré dont l'aire soit double de l'aire d'un carré donné.

564. — Trouver un cercle dont l'aire soit double de l'aire d'un cercle donné.

565. — Trouver un carré dont l'aire soit les $\frac{4}{9}$ de l'aire d'un carré donné.

566. — Trouver un cercle dont l'aire soit la moitié de l'aire d'un cercle donné.

567. — Que peut-on dire de trois polygones semblables ayant pour côtés homologues 3^{cm}, 4^{cm}, 5^{cm}? (Former les carrés des côtés homologues).

567 *bis.* — Même question avec 5^{cm}, 12^{cm} et 13^{cm}.

567 *ter.* — Même question avec 3^{cm}, 4^{cm}, 12^{cm} et 13^{cm} (quatre polygones).

PROBLÈMES SUR LA TROISIÈME PARTIE

1. — Calculer la surface d'un triangle rectangle sachant que la hauteur relative à l'hypoténuse mesure 7^{cm} et l'un des côtés de l'angle droit 10^{cm}.

2. — Le plus grand côté d'un rectangle mesure $0^{m},80$; les diagonales font un angle de $\frac{2D}{3}$. Calculez le périmètre et la surface.

3. — Calculez les bases d'un trapèze de 5^{cm} de hauteur et de 60^{cm^2} de surface sachant que l'une des bases est double de l'autre.

4. — Un trapèze a pour bases le diamètre et une corde d'un demi-cercle; ces bases mesurent 18^{m} et 12^{m}; calculez la hauteur du trapèze et son aire.

5. — On prolonge d'une longueur égale à eux-mêmes, et dans un même sens de parcours sur le périmètre, les trois côtés d'un triangle ABC; on joint les extrémités des segments obtenus. Démontrez que le nouveau triangle équivaut à 7 fois le triangle ABC.

6. — Calculez le rayon du cercle inscrit à un triangle rectangle isocèle dont les côtés égaux mesurent 7^{cm}.

7. — Même question en désignant par b les côtés égaux.

8. — *Problème inverse* : Calculez l'aire d'un triangle rectangle isocèle circonscrit à un cercle de rayon $r=4^{cm}$.

9. — Du sommet C d'un triangle équilatéral ABC circonscrit à un cercle de rayon $r=3^{cm}$, on mène la perpendiculaire CD à la bissectrice extérieure de l'angle A. Calculez les diagonales et l'aire du quadrilatère ABCD.

10. — Soit un trapèze ABCD; déterminer sur la grande base AB un point M tel que le segment MC coupe le trapèze en deux parties équivalentes.

11. — Les médianes d'un triangle le décomposent en six triangles équivalents.

12. — Où placer un point D sur le côté AB d'un triangle ABC et un point E sur le côté AC pour qu'en traçant CD et DE, on obtienne trois triangles équivalents?

13. — Où placer D et F sur le côté BA, E sur le côté CA d'un triangle ABC pour qu'en joignant CD, DE, EF, on obtienne quatre triangles équivalents?

14. — On prolonge dans les deux sens chacun des côtés d'un carré d'une longueur égale à la demi-diagonale et on trace le polygone convexe qui a pour sommets les huit points obtenus (octogone). 1° Évaluer les angles de cet octogone; 2° Connaissant le côté a du carré, évaluer les côtés de l'octogone et sa surface.

Application numérique : $a=5^{cm}$. — (On a 1 carré + 4 rectangles + 4 triangles, ou 1 rectangle + 2 trapèzes).

15. — Par les sommets A et C d'un quadrilatère convexe ABCD, on mène les parallèles à la diagonale BD; par les sommets B et D on mène les parallèles à la diagonale AC. Comparer les aires du quadrilatère ABCD et du parallélogramme formé.

16. — Les côtés d'un parallélogramme, $AB=28^{cm}$ et $AC=45^{cm}$, forment un angle de $\frac{4D}{3}$. Calculer sa surface.

17. — Sur chacun des côtés d'un hexagone régulier de rayon $R=4^{cm}$, on construit (extérieurement à l'hexagone) un carré; on joint les sommets voisins de deux carrés consécutifs. On forme ainsi un polygone à douze côtés.

Évaluer : 1° les angles et les côtés de ce polygone; 2° sa surface.

18. — Sur la diagonale AC d'un carré ABCD trouver un point P tel que le triangle PCD, le triangle PCB et le quadrilatère ABPD soient équivalents.

18 *bis.* — Même question en remplaçant le carré par un losange.

19. — Quatre tiges égales (genre Meccano), articulées à leurs extrémités, dessinent un losange déformable. Quand a-t-il la plus grande surface possible?

20. — De tous les triangles rectangles inscrits dans un cercle, quel est celui qui a la plus grande surface?

20 *bis.* — De tous les rectangles inscrits dans un cercle, quel est celui qui a la plus grande surface?

21. — Soit ABCD un trapèze (bases AB et DC) dont les diagonales se coupent en I. Démontrer que les triangles IAD et IBC sont équivalents.

22. — Couper un triangle en deux parties équivalentes par une parallèle à un côté.

23. — Soit un triangle ABC rectangle en A; on trace l'arc de cercle BAC

et, extérieurement au triangle, les demi-cercles de diamètre AB et AC. Montrer que la somme des deux croissants formés est équivalente au triangle.

24. — Soit un triangle isocèle ABC rectangle en A; on trace le quadrant BC de centre A et, extérieurement au triangle, le demi-cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse BC. Montrer que le croissant compris entre les deux arcs de cercle est équivalent au triangle.

25. — On donne un triangle équilatéral ABC de centre O, dont le côté est 48cm; on décrit les arcs de cercle AOB, BOC, COA. Calculer: 1° le rayon du cercle circonscrit au triangle; 2° l'aire de la rosace formée.

(Rép. R = 27cm,7; S = 417cm²).

26. — On divise un diamètre AB d'un cercle en un certain nombre de parties égales, 5 par exemple; on trace : d'un côté les demi-cercles ayant pour diamètre 1, 2, 3, 4 divisions et terminés en A; de l'autre côté, les demi-cercles ayant pour diamètres 1, 2, 3, 4 divisions et terminés en B. Le cercle est ainsi divisé en 5 bandes. Montrer que toutes ces bandes sont équivalentes équivalentes (fig. 286).

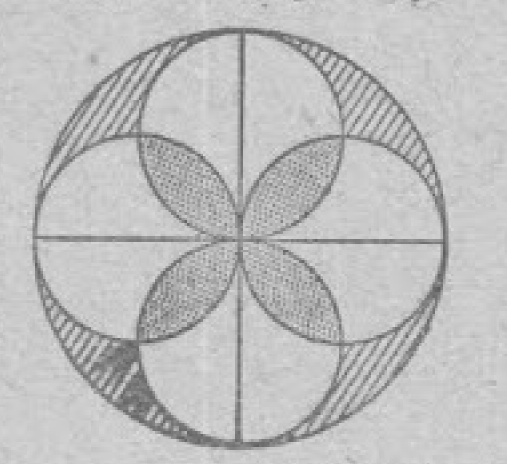
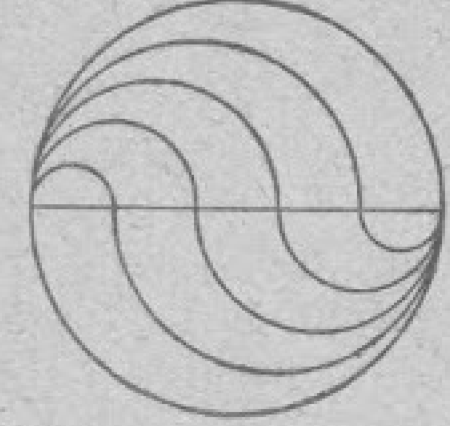



FIG. 286 et 287.

27. — On trace, dans un cercle, deux diamètres rectangulaires et on trace les cercles ayant pour diamètres les quatre rayons obtenus. Démontrer que la rosace centrale est équivalente à la surface extérieure aux petits cercles (fig. 287). (Il est inutile de calculer l'aire des surfaces à comparer.)

28. — Soit un secteur circulaire limité par deux rayons rectangulaires OA, OB. Sur OA et OB comme diamètres, on trace les deux demi-cercles intérieurs au secteur. Calculer l'aire de la portion de secteur extérieure aux demi-cercles. On donne OA = R.

29. — Dans un cercle de rayon R = 40cm, on trace, d'un même côté du centre, deux cordes parallèles égales respectivement au côté de l'hexagone régulier et au côté du carré inscrits. Évaluer la surface du cercle comprise entre ces deux cordes.

(Rép. S = 312cm²).

COMPLÉMENT

AIRES LATÉRALES ET VOLUMES DES SOLIDES USUELS

Aire latérale du prisme droit et du cylindre.

568. Règle. — I. *L'aire latérale du* **prisme droit** *est égale au produit du périmètre de la base par la hauteur.*

II. — *L'aire latérale du* **cylindre** *est égale au produit de la longueur du cercle de base par la hauteur.*

$$S = ph \qquad S = 2\pi Rh.$$

Aire latérale de la pyramide régulière et du cône.

569. Règle. — I. *L'aire latérale de la* **pyramide régulière** *est égale au demi-produit du périmètre de base par l'apothème de la pyramide.*

II. — *L'aire latérale du* **cône** *est égale au demi-produit de la longueur du cercle de base par la longueur d'une génératrice.*

$$S = \frac{1}{2}pa \qquad S = \pi Ra.$$

Aire de la zone. — Aire de la sphère.

570. Règle. — I. *L'aire de la* **zone** *est égale au produit de la longueur d'un grand cercle par la hauteur de la zone.*

II. — *L'aire de la* **sphère** *est égale à 4 fois l'aire d'un grand cercle.*

$$S = 2\pi Rh \qquad S = 4\pi R^2.$$

Volume du prisme et du cylindre.

571. Règle. — *Le volume du prisme ou du cylindre est égal au produit de l'aire de la base par la hauteur*

$$V = Bh \qquad V = \pi R^2 h.$$

Volume de la pyramide et du cône.

572. Règle. — *Le volume de la pyramide ou du cône est égal au tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur*

$$V = \frac{1}{3}Bh \qquad V = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

Volume de la sphère.

573. Règle. — *Le volume de la sphère est égal au tiers du produit de sa surface par son rayon*

$$V = \frac{S \times R}{3} \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Conversion des degrés en grades.

DEGRÉS	GRADES	MINUTES	GRADES	SECONDES	GRADES
1°	1,1111	1′	0,0185	1″	0,0003
2	2,2222	2	0,0370	2	0,0006
3	3,3333	3	0,0556	3	0,0009
4	4,4444	4	0,0741	4	0,0012
5	5,5556	5	0,0926	5	0,0015
6	6,6667	6	0,1111	6	0,0019
7	7,7778	7	0,1296	7	0,0022
8	8,8889	8	0,1481	8	0,0025
9	10,0000	9	0,1667	9	0,0028
10	11,1111	10	0,1852	10	0,0031
20	22,2222	20	0,3704	20	0,0062
30	33,3333	30	0,5556	30	0,0093
40	44,4444	40	0,7407	40	0,0123
50	55,5556	50	0,9259	50	0,0154
60	66,6667				
70	77,7778				
80	88,8889				
90	100,0000				
100	111,1111				

Exemple.

Évaluer 168° 37′ 54″ en grades.

100° = 111gr,1111
60 = 66 ,6667
8 = 8 ,8889
30′ = 0 ,5556
7 = 0 ,1296
50″ = 0 ,0154
4 = 0 ,0012

168° 37′ 54″ = 187gr,3685

Conversion des grades en degrés.

GRADES	DEGRÉS ET MINUTES	CENTIÈMES DE GRADES	MINUTES ET SECONDES	DIX-MILLIÈMES DE GRADE	SECONDES
1	0° 54′	1	0′32″	1	0″
2	1 48	2	1 5	2	1
3	2 42	3	1 37	3	1
4	3 36	4	3 0	4	1
5	4 30	5	2 42	5	2
6	5 24	6	3 14	6	2
7	6 18	7	3 47	7	2
8	7 12	8	4 19	8	3
9	8 6	9	4 52	9	3
10	9	10	5 24	10	3
20	18	20	10 48	20	7
30	27	30	16 12	30	10
40	36	40	21 36	40	13
50	45	50	27 0	50	16
60	54	60	32 24	60	19
70	63	70	37 48	70	23
80	72	80	43 12	80	26
90	81	90	48 36	90	29
100	90				

Exemple.

Évaluer 127gr,7384 en degrés, minutes et secondes.

100gr = 90°
20 = 18
7 = 6° 18′
0 ,70 = 37′ 48″
0 ,03 = 1 37
0 ,0080 = 26
0 ,0004 = 1

127gr,7384 = 114° 57′ 52″

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE. — LA DROITE ET LE CERCLE

DEUXIÈME PARTIE

SIMILITUDE ET RELATIONS MÉTRIQUES

TROISIÈME PARTIE. — AIRES

COMPLÉMENT

TABLES NUMÉRIQUES

19620-3-35

IMPRIMERIE DELAGRAVE
VILLEFRANCHE-DE-ROUERGUE
FRANCE

BIBLIOTHÈQUE

Romans Nouvelles Variétés

Les ouvrages qui composent cette nouvelle collection sont choisis parmi ceux que préfère la jeunesse

LA REINE DES NEIGES
par Andersen

FRANÇOIS BUCHAMOR
par A. Assollant

LE COLONEL CHABERT
par H. de Balzac

LES CHOUANS
par H. de Balzac

PIERRETTE
par H. de Balzac

LA CASE DE L'ONCLE TOM
par H. Beecher-Stowe

JUVENTA

Prix de chaque volume illustré 12 × 18.5

Broché............ 4.50
Relié toile pleine rouge, fers spéciaux......... 8.50

JEAN DE LA FONTAINE
par N. Brunel et J. Morlins

LE PETIT LORD
par F. H. Burnett

LES CHERCHEURS D'ÉPAVES
par M. Champagne

JEAN PACIFIQUE
par M. Champagne

LE PETIT FAUCONNIER DE LOUIS XIII
par J. Chancel

LE DERNIER DES MOHICANS
par F. Cooper



NOUVEAUX PROGRAMMES

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Eléments de Géométrie Plane

(Cl. de 4e et 3e)

PAR F. BRACHET ET J. DUMARQUÉ

Librairie Delagrave